Musterlösung 7

1. **a)** $\frac{2-3i}{1+4i} = \frac{(2-3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{(2-12)-(8+3)i}{17} = -\frac{10}{17} - \frac{11}{17}i.$

b) $\frac{\overline{2-3i}}{1+4i} = \frac{2+3i}{1+4i} = \frac{(2+3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{(2+12)+(-8+3)i}{17} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}i.$

c) $\overline{(2-3i)(1+4i)} = \overline{(2-3i)} \cdot \overline{(1+4i)} = (2+3i)(1-4i) = 2+12-8i+3i = 14-5i.$

d) Mit Hilfe von (a) erhalten wir $\overline{\left(\frac{2-3i}{1+4i}\right)} = \overline{-\frac{10}{17} - \frac{11}{17}i} = -\frac{10}{17} + \frac{11}{17}i.$

2. **a)** A ist die Menge aller komplexen Zahlen, deren Abstand von i im Intervall $]1, 2[$ liegt, also der offene Kreisring um i mit innerem Radius 1 und äusserem Radius 2.

b) B ist der Durchschnitt der durch die Ungleichungen $|z| \geq 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ und $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}$ gegebenen Mengen, d.h. die Menge aller komplexen Zahlen, die ausserhalb des offenen Einheitskreises, in der strikten oberen Halbebene und in dem "vertikalen" abgeschlossenen Streifen der Breite 1 um die imaginäre Achse liegen.

c) Es gilt $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$. Also ist die Ungleichung $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$ äquivalent zu $-1 < \operatorname{Im}(z) < 0$. C ist folglich ein "horizontaler" offener Streifen der Breite 1, dessen oberer Rand die reelle Achse ist.

d) Wir schreiben $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\operatorname{Re}(z) = a$. Die Bedingung $|z| = \operatorname{Re}(z) + 1$ wird also zu

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + 1.$$

Da die linke Seite nicht-negativ ist, folgt, dass $a \geq -1$ sein muss. Unter dieser Bedingung (und nur dann) können wir die Gleichung durch Quadrieren äquivalent umformen:

$$\begin{array}{rrcl} & a^2 + b^2 & = & (a+1)^2 \\ \Leftrightarrow & a^2 + b^2 & = & a^2 + 2a + 1 \\ \Leftrightarrow & a & = & \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}. \end{array}$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist eine um 90 Grad gedrehte Parabel mit Scheitelpunkt $(-\frac{1}{2}, 0)$ und Brennpunkt $(0, 0)$. Wegen $a = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$ wird

Bitte wenden!

die Bedingung $a \geq -1$ von allen Punkten der Parabel erfüllt, d.h. die Parabel ist genau D.

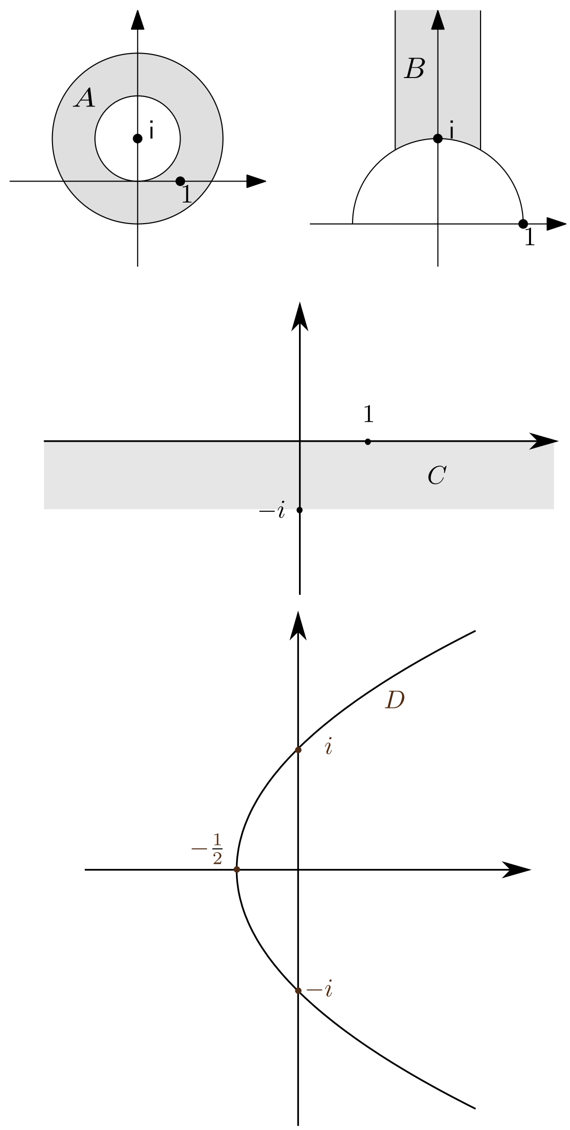

Abbildung 1: Zu Aufgabe 2

3. Die Lösungen einer quadratischen Gleichung mit komplexen Koeffizienten sind, wie im reellen Fall, durch die Lösungsformel für quadratische Gleichungen gegeben. Es

Siehe nächstes Blatt!

gilt also hier

$$\begin{aligned} z_{0,1} &= \frac{-(1-i) \pm \sqrt{(1-i)^2 - 4\cdot(-5i)}}{2} \\ &= \frac{-1+i \pm \sqrt{-2i+20i}}{2} \\ &= \frac{-1+i \pm 3\sqrt{2i}}{2}. \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun $\pm\sqrt{2i}$, d.h. die Lösungen der Gleichung $w^2 = 2i$. Dazu machen wir den Ansatz $w = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $w^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$, und durch Koeffizientenvergleich mit $w^2 = 2i$ erhalten wir die Gleichungen

$$a^2 - b^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad 2ab = 2. \tag{1}$$

Die zweite Gleichung ist äquivalent zu $b = \frac{1}{a}$. Dies verwenden wir zur Substitution von b in der ersten Gleichung und multiplizieren diese noch mit a^2. Damit erhalten wir $a^4 - 1 = 0$. Diese Gleichung hat die reellen Lösungen $a_0 = -1$ und $a_1 = 1$. Zur Bestimmung der zugehörigen Werte für b verwenden wir (1) und erhalten $b_0 = -1$ und $b_1 = 1$. Also sind die Lösungen von $w^2 = 2i$

$$w_0 = -1 - i \text{ und } w_1 = 1 + i.$$

Setzen wir dies wiederum in die Formel für $z_{0,1}$ ein, erhalten wir

$$z_{0,1} = \frac{-1+i \pm 3(1+i)}{2},$$

also ist

$$z_0 = 1 + 2i \qquad \text{und} \qquad z_1 = -2 - i.$$

4. Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, falls der Grenzwert existiert oder ∞ ist.

a) $a_n = n \Rightarrow \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{n}{n+1}\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Daher ist der Konvergenzradius $R = 1$.

b) $a_n = n^n \Rightarrow \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} \leq \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Aus dem Majorantenkriterium folgt $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 0$. Somit ist der Konvergenzradius $R = 0$. (Die Potenzreihe konvergiert also nur für den Wert $z = 0$.)

c) $a_n = 2^{-n} n! \Rightarrow \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2^{-n} n!}{2^{-(n+1)}(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Daher ist der Konvergenzradius $R = 0$. (Die Potenzreihe konvergiert also nur für den Wert $z = 0$.)

Bitte wenden!

d) Das Quotientenkriterium ist nicht direkt anwendbar, weil unendlich viele Koeffizienten der Potenzreihe Null sind. Betrachte deshalb zuerst statt $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^{2n}$ die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} w^n$. Die ursprüngliche Potenzreihe erhält man daraus, indem man $w := z^2$ einsetzt. Wir erhalten:

$a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \Rightarrow \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \cdot \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)\cdot(n+1)}{(2n+2)\cdot(2n+1)} = \frac{1}{4-\frac{2}{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}$.

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} w^n$ hat also den Konvergenzradius $R = \frac{1}{4}$.

Der Konvergenzradius ist aber die eindeutige Zahl R, so dass für alle w mit $|w| < R$ die Reihe konvergiert und für alle $|w| > R$ die Reihe divergiert.

Deshalb konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^{2n}$ für $|z|^2 = |z^2| < \frac{1}{4}$ und divergiert für $|z|^2 = |z^2| > \frac{1}{4}$.

Das heisst $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^{2n}$ konvergiert für $|z| < \frac{1}{2}$ und divergiert für $|z| > \frac{1}{2}$.

Also hat $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^{2n}$ den Konvergenzradius $\frac{1}{2}$.

e) Das Quotientenkriterium ist hier nicht anwendbar. Wir vergleichen die Reihe der Absolutbeträge mit der geometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z^{n^2}| = \sum_{k=n^2, n\in\mathbb{N}} |z|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k.$$

Die geometrische Reihe konvergiert für $|z| < 1$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert also auch die erstere Reihe für $|z| < 1$. Ihr Konvergenzradius ist daher mindestens 1. Da die Reihe für $|z| = 1$ nicht konvergiert, ist ihr Konvergenzradius höchstens 1. Also ist der Konvergenzradius $R = 1$.