Musterlösung 8

1. **a)** $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x \log x} = e^0 = 1$,
$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\log x} = e^0 = 1$.

b) Wir betrachten zunächst den Logarithmus von $\frac{x^{\log x}}{e^x}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x^{\log x}}{e^x}\right) &= (\log x)(\log x) - x \\ &= \left(\frac{\log^2 x}{x} - 1\right)\cdot x \\ &= \left(\left(\frac{\log x}{x^{1/2}}\right)^2 - 1\right)\cdot x \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.\end{aligned}$$

Damit können wir den gesuchten Grenzwert berechnen:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\log x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\exp\left(\log\left(\frac{x^{\log x}}{e^x}\right)\right) = 0.$$

c) Mit der Substitution $t := \frac{1}{n}$ erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}^{>0}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(x^{1/n} - 1) &= \lim_{t\to 0}\frac{x^t - 1}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{e^{t\log x} - 1}{t} && \Big|\ s := t\cdot\log x \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{e^s - 1}{\frac{s}{\log x}} \\ &= \log x \cdot \underbrace{\lim_{s\to 0}\frac{e^s - 1}{s}}_{=1} \\ &= \log x.\end{aligned}$$

2. **a)** Für Cosinus und Sinus haben wir die Reihendarstellungen

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - + \ldots$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \ldots$$

wobei die Ordnung aller weggelassenen Terme grösser als 5 ist. Beachte, dass Cosinus eine gerade und Sinus eine ungerade Funktion ist. Es ist also

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \dots}{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - + \dots}.$$

Durch Einsetzen der geometrischen Reihe für den Nenner erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tan z =& \frac{z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \dots}{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - + \dots} \\
=& \frac{\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \dots\right)}{1 - \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + - \dots\right)} \\
=& \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \dots\right) \\
& \cdot \left(1 + \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + - \dots\right) + \underbrace{\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + - \dots\right)^2}_{\frac{z^4}{4} + \dots} + \dots\right) \\
=& \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \dots\right) \\
& + \underbrace{\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \dots\right) \cdot \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + - \dots\right)}_{\frac{z^3}{2} - \frac{z^5}{12} - \frac{z^5}{24} + \dots} \\
& + \underbrace{\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \dots\right) \cdot \left(\frac{z^4}{4} + \dots\right)}_{\frac{z^5}{4} + \dots} + \dots \\
=& z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^3}{2} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^5}{12} - \frac{z^5}{24} + \frac{z^5}{4} + \dots \\
=& z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \dots .
\end{aligned}$$

b) Wir wissen, dass $\arctan(\tan z) = z$ gilt. Da der Tangens eine ungerade Funktion ist, ist auch der Arcustangens, als dessen Umkehrfunktion, ungerade. Daher können wir den Ansatz

$$\arctan z = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots$$

Siehe nächstes Blatt!

aufstellen. Durch Einsetzen von $\tan z$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
z =& a_1 \tan z + a_3 \tan^3 z + a_5 \tan^5 z + \dots \\
=& a_1 \left(z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \dots \right) + a_3 \underbrace{\left(z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \dots \right)^3}_{z^3 + 3 \cdot \frac{1}{3} z^5 + \dots} \\
& + a_5 \underbrace{\left(z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \dots \right)^5}_{z^5 + \dots} + \dots . \\
=& a_1 z + \left(\frac{a_1}{3} + a_3 \right) z^3 + \left(\frac{2a_1}{15} + a_3 + a_5 \right) z^5 + \dots
\end{aligned}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$a_1 = 1, \quad \frac{a_1}{3} + a_3 = 0 \;\text{ und }\; \frac{2a_1}{15} + a_3 + a_5 = 0$$

und somit ist

$$a_1 = 1, \quad a_3 = -\frac{1}{3} \;\text{ und }\; a_5 = \frac{1}{5}.$$

Daher gilt also

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots .$$

3. Sei $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned}
e^x \cos x &= e^x \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((1+i)x)^n}{n!} \right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((1-i)x)^n}{n!} \right) \right] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2 \cdot n!} \cdot x^n \\
&=: \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n .
\end{aligned}$$

Falls n gerade ist, d.h. $n = 2p$ für ein $p \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ gilt, folgt aus $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$

$$c_{2p} = \frac{(1+i)^{2p} + (1-i)^{2p}}{2 \cdot (2p)!} = \frac{(2i)^p + (-2i)^p}{2 \cdot (2p)!} = \frac{2^p}{(2p)!} \cdot \frac{i^p + (-i)^p}{2}.$$

Bitte wenden!

Ist p ungerade, so gilt dabei $(-i)^p = -i^p$ und daher $c_{2p} = 0$. Ist $p = 2m$ gerade, so gilt $(-i)^p = i^p = (-1)^m$ und daher

$$c_{2p} = c_{4m} = \frac{(-1)^m 4^m}{(4m)!}.$$

Für $n = 2p + 1$ ungerade gilt

$$c_{2p+1} = \frac{(1+i) \cdot (1+i)^{2p} + (1-i) \cdot (1-i)^{2p}}{2 \cdot (2p+1)!} = \frac{(1+i) \cdot (2i)^p + (1-i) \cdot (-2i)^p}{2 \cdot (2p+1)!}.$$

Daraus folgt entsprechend

$$\begin{aligned} c_{2p+1} &= \frac{(-1)^m 4^m}{(4m+1)!}, \qquad \text{wenn } p = 2m \text{ ist,} \\ &= -\frac{(-1)^m 2^{2m+1}}{(4m+3)!}, \quad \text{wenn } p = 2m+1 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Somit folgt für alle $m \geq 0$

$$c_{4m} = \frac{(-1)^m 4^m}{(4m)!}, \quad c_{4m+1} = \frac{(-1)^m 4^m}{(4m+1)!}, \quad c_{4m+2} = 0, \quad c_{4m+3} = \frac{(-1)^{m+1} 2^{2m+1}}{(4m+3)!}.$$