Musterlösung 9

1. **a)** Wir setzen die Definition ein und rechnen aus:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 \cdot \underbrace{e^{x-x}}_{=1} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 \cdot \underbrace{e^{x-x}}_{=1} + e^{-2x})) = 1.\end{aligned}$$

b) Setze $x = \operatorname{arsinh} y$. Dann ist

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2ye^x = e^{2x} - \underbrace{e^{x-x}}_{=1} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in e^x und besitzt formal die Lösungen $e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Wegen $e^x > 0$ und $\sqrt{y^2+1} > |y|$ muss das Vorzeichen positiv sein. Es folgt $x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$.

c) Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, ist der komplexe Cosinus Hyperbolicus definiert als

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Beachte, dass Cosinus eine gerade und Sinus eine ungerade Funktion ist. Folglich ist

$$\begin{aligned}\cosh(a+ib) &= \frac{1}{2}\big(e^{a+ib} + e^{-(a+ib)}\big) = \frac{1}{2}\big(e^a e^{ib} + e^{-a}e^{-ib}\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(e^a(\cos b + i\sin b) + e^{-a}(\cos(-b) + i\sin(-b))\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(e^a(\cos b + i\sin b) + e^{-a}(\cos b - i\sin b)\big) \\ &= \left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right)\cos b + i\left(\frac{e^a - e^{-a}}{2}\right)\sin b \\ &= \cosh a \cos b + i \sinh a \sin b.\end{aligned}$$

2. Zunächst halten wir fest, dass f_α für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ an jeder Stelle $x \neq 0$ stetig und differenzierbar ist mit

$$\begin{aligned}f'_\alpha(x) &= \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} + x^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

a) Wegen $f_\alpha(0) = 0$ bedeutet die Stetigkeit an der Stelle 0, dass $\lim_{x\to 0+} f_\alpha(x) = 0$ gilt. Da $x \mapsto \sin x$ eine beschränkte Funktion ist, ist auch $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ beschränkt. Also strebt sicherlich f_α dann für $x \to 0$ gegen 0, wenn x^α gegen 0 strebt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\alpha > 0$ ist.

Ist dagegen $\alpha \leq 0$, so ist $x^\alpha \geq 1$ für jedes x mit $0 < x < 1$. Ausserdem gibt es in jeder Umgebung von 0 Punkte x_0 mit $\sin \frac{1}{x_0} = 1$, nämlich die Punkte $\frac{2}{(1+4n)\pi}$ mit $n \in \mathbb{Z}$. An diesen Punkten ist folglich auch $|f_\alpha(x_0)| \geq 1$. Insbesondere konvergiert f_α nicht gegen 0.

Also ist f_α genau dann stetig in 0, wenn $\alpha > 0$ ist.

b) Die Differenzierbarkeit von f_α an der Stelle 0 bedeutet, dass der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^\alpha \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0+} x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}$$

existiert und 0 ist, denn der entsprechende linksseitige Grenzwert ist 0.

Für $\alpha \leq 1$ ist $x^{\alpha-1} \geq 1$ für jedes x mit $0 < x < 1$. In jeder Umgebung von 0 gibt es Punkte x_0, so dass $\sin \frac{1}{x_0} = 1$ gilt, und damit ist $x_0^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x_0} > 1$. Andererseits gibt es in jeder Umgebung von 0 Punkte x_0 mit $\sin \frac{1}{x_0} = 0$ und somit $x_0 \sin \frac{1}{x_0} = 0$. Also existiert der Grenzwert in dem Fall nicht.

Für $\alpha > 1$ gilt dagegen $x^{\alpha-1} \overset{x\to 0+}{\longrightarrow} 0$ und damit folgt, ähnlich wie in a), dass $x \sin \frac{1}{x} \to 0$ für $x \to 0+$ gilt. Also ist f_α in diesem Fall an der Stelle 0 differenzierbar mit $f'_\alpha(0) = 0$.

Folglich ist f_α genau dann an der Stelle 0 differenzierbar, wenn $\alpha > 1$ ist.

c) Aus b) wissen wir, dass f_α genau dann bei 0 differenzierbar ist, wenn $\alpha > 1$ gilt, und in jedem Fall ist dann $f'_\alpha(0) = 0$. Die Stetigkeit von f'_α zu überprüfen bedeutet also, zu überprüfen, wann $f'_\alpha(x) \xrightarrow{x\to 0+} 0$ gilt. Der erste Summand in

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}$$

ist für jedes $\alpha \geq 1$ beschränkt und strebt für $\alpha > 1$ gegen 0 wenn x gegen 0 strebt.

Der zweite Summand nimmt für $1 \leq \alpha < 2$ in jeder Umgebung von 0 beliebig grosse Werte an, denn $x^{\alpha-2} \to \infty$ für $x \to 0+$; deswegen konvergiert $f'_\alpha(x)$ in diesem Fall nicht gegen 0. Für $\alpha = 2$ konvergiert der erste Summand gegen 0, der zweite nimmt dagegen in jeder Umgebung von 0 an bestimmten Punkten den Wert 1 an und somit konvergiert $f'_\alpha(x)$ auch in diesem Fall nicht. Für $\alpha > 2$ konvergieren schliesslich beide Summanden gegen 0, da die Potenzen in diesem Fall beide positiv sind und Sinus und Cosinus beschränkt sind.

Folglich ist f'_α genau dann unstetig, wenn $1 < \alpha \leq 2$ ist.

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(9x^7+3x^{-5}-3x^{-11}) &= 7\cdot 9x^6+(-5)3x^{-6}-(-11)3x^{-12}\\ &= 63x^6-15x^{-6}+33x^{-12}.\end{aligned}$$

b) Wir verwenden zuerst die Kettenregel und dann die Quotientenregel:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}} &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}}\cdot\frac{(2x-3)(x^2-7x+12)-(x^2-3x+2)(2x-7)}{(x^2-7x+12)^2}\\ &= \frac{(x^2-7x+12)^{\frac{1}{2}}}{2(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(-4x^2+20x-22)}{(x^2-7x+12)^2}\\ &= \frac{-2x^2+10x-11}{(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}(x^2-7x+12)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

c) Mit den Beziehungen

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh x \quad\textbf{und}\quad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

und der Kettenregel folgt

$$(\log(\cosh x))' = \frac{(\cosh x)'}{\cosh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x.$$

d) Kettenregel:

$$(\log(\log(\log x)))' = \frac{1}{\log(\log x)}\cdot\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\cdot\log x\cdot\log(\log x)}.$$

e) Es gilt $a^b = e^{b\log a}$. Daher ist $3^x = e^{x\log 3}$ und es folgt $(3^x)' = (e^{x\log 3})' = (\log 3)e^{x\log 3} = (\log 3)3^x$. Mit der Produktregel erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}3^x x^3 &= 3^x\cdot 3x^2+(\log 3)3^x x^3\\ &= 3^x x^2(3+x\log 3).\end{aligned}$$

Bitte wenden!

f) Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist die Umkehrfunktion von $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$. Für $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= 1 + \tan^2 x.
\end{aligned}$$

Mit der Regel $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ erhalten wir also

$$\begin{aligned}
(\arctan x)' &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} \\
&= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} \\
&= \frac{1}{1 + x^2}
\end{aligned}$$

und somit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\arctan(x - \sqrt{x^2+1}) &= \frac{1}{1 + (x - \sqrt{x^2+1})^2}\left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1 + (x - \sqrt{x^2+1})^2} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}(1 + (x - \sqrt{x^2+1})^2)} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}(1 + x^2 - 2x\sqrt{x^2+1} + (x^2+1))} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}(-2x\sqrt{x^2+1} + 2 + 2x^2)} \\
&= \frac{x^2 + 1 - x\sqrt{x^2+1}}{2(x^2+1)(x^2 + 1 - x\sqrt{x^2+1})} \\
&= \frac{1}{2(x^2+1)}.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Wir leiten die Quotientenregel direkt aus der Definition her.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f}{g}(x+h) - \frac{f}{g}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x) - \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \cdot f(x)\right) \\
&= \frac{1}{g^2(x)} \left(f'(x)g(x) - g'(x)f(x)\right) \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

Da $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind existiert der Grenzwert auf der rechten Seite. Daher existiert auch der Grenzwert auf der linken Seite und es folgt, dass $\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.