Musterlösung 11

1. Wir betrachten die Funktion $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^{\frac{1}{3}}$ in einer Umgebung der Stelle $t = 65$. Die nächste Zahl $t_0 \in \mathbb{R}$, für die wir $f(t_0)$ exakt kennen, ist $t_0 = 64$ mit $f(t_0) = 4$. Für jedes $n \in \mathbb{Z}^{>0}$ können wir f schreiben als

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(64)}{k!}(t-64)^k + R_{64}^n f(t),$$

d.h. als Summe des Taylorpolynoms n-ter Ordnung um den Entwicklungspunkt $t_0 = 64$ und eines Restglieds. Das Restglied ist gegeben ist durch

$$R_{64}^n f(t) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}$$

für ein τ zwischen t und t_0. Insbesondere ist für $t = 65$

$$R_{64}^n f(65) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}$$

für ein $\tau \in]64, 65[$. Wir müssen n nun so gross wählen, dass $|R_{64}^n f(65)| < 10^{-5}$ ist.

Induktiv finden wir $f'(t) = \frac{1}{3} \cdot t^{-2/3}$ und $f''(t) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot t^{-5/3} = -\frac{2}{9} \cdot t^{-5/3}$. Für ein geeignetes $\tau \in]64, 65[$ ist daher

$$|R_{64}^1 f(65)| = \left| \frac{-\frac{2}{9} \cdot \tau^{-5/3}}{2!} \right| = \frac{\tau^{-5/3}}{9} > \frac{65^{-5/3}}{9} > 10^{-5},$$

was noch zu gross ist. Sodann ist $f'''(t) = \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot \tau^{-7/3} = \frac{10}{27} \cdot \tau^{-7/3}$ und somit

$$|R_{64}^2 f(65)| = \left| \frac{\frac{10}{27} \cdot \tau^{-7/3}}{3!} \right| = \frac{5}{54} \cdot \tau^{-7/3} < \frac{5}{54} \cdot 64^{-7/3} < 10^{-5}$$

was hinreichend gut ist. Also genügt es, f durch das Taylorpolynom zweiter Ordnung zu approximieren. Dieses lautet

$$\begin{aligned}
j_{64}^2 f(t) &= f(64) + f'(64) \cdot (t-64) + \frac{f''(64)}{2} \cdot (t-64)^2 \\
&= 64^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \cdot 64^{-\frac{2}{3}} \cdot (t-64) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right) 64^{\frac{1}{3}-2} \cdot (t-64)^2 \\
&= 4 + \frac{t-64}{48} - \frac{1}{9} \cdot 64^{-\frac{5}{3}} \cdot (t-64)^2 \\
&= 4 + \frac{t-64}{48} - \frac{(t-64)^2}{9216}.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Dessen Wert an der Stelle $t = 65$ liefert die gesuchte Näherung

$$4 + \frac{1}{48} - \frac{1}{9216} = \frac{37055}{9216} \approx 4.020724826.$$

2. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Wir defnieren

$$g(x) := \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \text{und} \quad h(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}.$$

Wir bemerken, dass

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} h(x) \tag{1}$$

ist. *Behauptung*: Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ ist die allgemeine Darstellung der n-ten Ableitung der Funktion $p_\alpha :]0, \infty[\to \mathbb{R};\ x \mapsto x^\alpha$ gegeben durch

$$p_\alpha^{(n)}(x) = \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j) \cdot x^{\alpha - n}.$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung mittels Induktion nach n.
Induktionsverankerung: Für $n = 1$ folgt

$$p'_\alpha(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1},$$

was unserer Formel entspricht.
Induktionsschritt: $n \to n + 1$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} p_\alpha^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} p_\alpha^{(n)}(x) &= \frac{d}{dx} \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j) \cdot x^{\alpha - n} \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j) \cdot \frac{d}{dx} x^{\alpha - n} = \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j) \cdot (\alpha - n) \cdot x^{\alpha - (n+1)} \\ &= \prod_{j=0}^{n} (\alpha - j) \cdot x^{\alpha - (n+1)}. \end{aligned}$$

□

Siehe nächstes Blatt!

Wir bemerken, dass $g(x) = p_{1/2}(x)$ und $h(x) = p_{-1/2}(x)$ gilt. Damit und mit (1) erhalten wir für $n \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$ die folgende Darstellung der n-ten Ableitung von f:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= g^{(n)}(x) + h^{(n)}(x) = \frac{1}{2} h^{(n-1)}(x) + h^{(n)}(x) \\
&= \frac{1}{2} \prod_{j=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2} - j\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-(n-1)} + \prod_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - j\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-n} \\
&= \prod_{j=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2} - j\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-(n-1)} + \left(-\frac{1}{2} - (n-1)\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-n}\right) \\
&= (-1)^{n-1} \prod_{j=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2} + j\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + n - 1\right) \frac{1}{x}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-(n-1)}.
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt daher für $x = 1$ und $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(1) &= (-1)^{n-1} \prod_{j=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2} + j\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + n - 1\right)\right) \\
&= (-1)^{n} (n-1) \prod_{j=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2} + j\right).
\end{aligned}$$

Damit lässt sich nun die Taylorreihe von $f(x)$ um den Punkt $x_0 = 1$ berechnen

$$\begin{aligned}
j_1^\infty f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = \underbrace{f(1)}_{=2} + \underbrace{f'(1)}_{=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0} (x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n \\
&= 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{n-1}{n!} \cdot \prod_{j=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2} + j\right) \cdot (x-1)^n\right).
\end{aligned}$$

Wir bestimmen nun den Konvergenzradius ϱ der Taylorreihe. Nach dem Quotientenkriterium gilt

$$\begin{aligned}
\varrho &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n \cdot \frac{n-1}{n!} \prod_{j=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2} + j\right)}{(-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} + j\right)}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|(-1) \cdot \frac{(n-1) \cdot (n+1)!}{n \cdot n! \cdot \left(\frac{1}{2} + n - 1\right)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n-1)(n+1)}{n\left(n - \frac{1}{2}\right)}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2 - 1}{n^2 - \frac{1}{2} n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{2n}}\right| = 1.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Also ist $j_1^\infty f(x)$ absolut konvergent auf $|x-1|<1$. Zuletzt berechnen wir noch das Restglied $R_1^n f(x)$ der Ordnung n:

$$\begin{aligned} R_1^n f(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} \\ &= (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}+j\right)\tau^{-\frac{1}{2}-n}\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{1}{\tau}\right)\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

für ein geeignetes τ zwischen x und $x_0 = 1$.

3. Aus Serie 9 Aufgabe 3 f) ist bekannt, dass $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ gilt. Die ersten beiden Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot 2e^{2x} + \frac{1}{1+(e^x)^2}\cdot e^x = \frac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}}, \\ f''(x) &= \frac{(2e^{2x}+e^x)(1+e^{2x})-(e^{2x}+e^x)2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \\ &= \frac{2e^{2x}+2e^{4x}+e^x+e^{3x}-2e^{4x}-2e^{3x}}{(1+e^{2x})^2} \\ &= \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\cdot(-e^{2x}+2e^x+1). \end{aligned}$$

Für alle $x\in\mathbb{R}$ ist

$$f'(x) = \frac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}} > 0,$$

und daraus folgt, dass f keine kritische Punkte besitzt, insbesondere also keine lokalen Extrema. Da f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, folgt weiter, dass f auch keine globalen Extrema besitzt.

Ausserdem ist für alle $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\big(f''(x)\big) &= \operatorname{sgn}\Big(\frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\cdot(-e^{2x}+2e^x+1)\Big) \\ &= \underbrace{\operatorname{sgn}\left(\frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\right)}_{=1}\cdot\operatorname{sgn}\left(-e^{2x}+2e^x+1\right) \\ &= \operatorname{sgn}\big(-e^{2x}+2e^x+1\big). \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Indem wir $y := e^x$ setzen, erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(f''(x)) &= \operatorname{sgn}\big(-y^2+2y+1\big) \\
&= \operatorname{sgn}\big(2-(y-1)^2\big) \\
&= \operatorname{sgn}\left((\sqrt{2}+1-y)(\sqrt{2}-1+y)\right) \\
&= \operatorname{sgn}\left((\sqrt{2}+1-e^x)\right)\cdot \underbrace{\operatorname{sgn}\left(\sqrt{2}-1+e^x\right)}_{=1} \\
&= \operatorname{sgn}(\sqrt{2}+1-e^x).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\operatorname{sgn}\big(f''(x)\big) = \begin{cases} +1 & \text{für} \quad x < \log(1+\sqrt{2}) \\ 0 & \text{für} \quad x = \log(1+\sqrt{2}) \\ -1 & \text{für} \quad x > \log(1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

Die Funktion f ist also konvex für $x < \log(1+\sqrt{2})$ und konkav für $x > \log(1+\sqrt{2})$. Im Punkt $x = \log(1+\sqrt{2})$ selbst ändert f'' das Vorzeichen, daher besitzt f dort einen Wendepunkt.

Zuletzt betrachten wir noch das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\Big(\log(1+e^{2x})\Big)+\arctan(e^x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\log(1)+\arctan(0) \\
&= 0+0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\Big(\log(1+e^{2x})\Big)+\arctan(e^x)\right) &= \infty+\frac{\pi}{2} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

4. a) Die erste Ableitung der Funktion f ist $f'(x) = -x^{-2}$. Das Newtonsche Verfahren liefert also

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{-1}-c}{x_n^{-2}} = x_n + (x_n^{-1}-c)\cdot x_n^2 = x_n\cdot(2-cx_n).$$

Bitte wenden!

b) Wir leiten zuerst eine Rekursionsformel für u_{n+1} in Termen von u_n her. Mittels $x_n = \frac{1}{c} - u_n$ finden wir

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{c} - x_{n+1} = \frac{1}{c} - x_n(2 - cx_n) = \frac{1}{c} - \left(\frac{1}{c} - u_n\right) \cdot \left(2 - c \cdot \left(\frac{1}{c} - u_n\right)\right) \\
&= \frac{1}{c} - \frac{1 - cu_n}{c} \cdot (2 - 1 + cu_n) = \frac{1}{c} - \frac{2 - 1 + cu_n - 2cu_n + cu_n - c^2u_n^2}{c} \\
&= \frac{1}{c} - \frac{1 - c^2u_n^2}{c} = cu_n^2.
\end{aligned}$$

Diese Rekursionsformel ist äquivalent zu $cu_{n+1} = (cu_n)^2$. Für alle $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ gilt daher $cu_n = (cu_0)^{2^n}$ und somit auch

$$u_n = \frac{(cu_0)^{2^n}}{c}.$$

Da $u_0 = \frac{1}{c} - x_0 = \frac{1}{c} - 1$ ist erhalten wir für den Fehler u_n die geschlossene Formel

$$u_n = \frac{(cu_0)^{2^n}}{c} = \frac{(1-c)^{2^n}}{c}.$$

c) Nach 10 Schritten ist der Fehler für $c = \frac{3}{2}$

$$u_{10} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{3}{2}\right)^{2^{10}} \approx 3.708456431 \cdot 10^{-309}.$$