Musterlösung 12

1. **a)** Sei $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und sei $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, eine Auswahl an Stützstellen. Die entsprechenden Riemann-Summen für f und g erfüllen dann wegen $f(\xi_i) \leq g(\xi_i)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Die Riemann-Summen konvergieren gegen die jeweiligen Integrale, wenn die Feinheit der Zerlegung gegen 0 strebt. Da die Ungleichung für jede Wahl $(Z, \underline{\xi})$ gilt, gilt sich auch für die Grenzwerte, d.h.

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

b) Wir beweisen dies mittels Widerspruch, d.h. wir nehmen an, dass ein $x_0 \in (a, b)$ existiert, so dass $f(x_0) > 0$. Da f auf ganz $[a, b]$ stetig, ist f insbesondere auch in x_0 stetig, d.h.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Wählen wir $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ so folgt für ein $\delta_0 > 0$

$$|x - x_0| < \delta_0 \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$|x - x_0| < \delta_0 \Longrightarrow 0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x).$$

Wegen $f(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ folgt mit obiger Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0+\delta_0}^{b} f(x)dx + \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} f(x)dx + \int_a^{x_0-\delta_0} f(x)dx \\
&\geq \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} f(x)dx \\
&\geq \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} \frac{f(x_0)}{2}dx \\
&= \delta_0 f(x_0) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

im Widerspruch zu $\int_a^b f dx = 0$.

Bitte wenden!

2. a) Wir betrachten eine äquidistante Zerlegung $Z_n = (c_0, c_1, \ldots, c_N)$ des Intervalls $[a, b]$, das heisst mit

$$c_k = a + k \cdot \frac{b-a}{N}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Die Feinheit dieser Zerlegung ist $\delta(Z_N) \equiv \max\{c_k - c_{k-1} \ : \ k = 1 \ldots N\} = \frac{b-a}{N}$, was für $N \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Also konvergiert nach Definition der Integrierbarkeit und des Integrals jede Folge von Riemann–Summen, die bezüglich dieser Zerlegungen Z_N gebildet werden, gegen das Integral. Mit der Wahl $\xi_k := c_{k-1} \in [c_{k-1}, c_k]$ für die Stützstellen folgt

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{\lambda x}\, dx &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\lambda\left(a + k\frac{b-a}{N}\right)} \frac{b-a}{N} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N} e^{\lambda a} \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{\lambda \frac{b-a}{N}}\right)^k \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N}\, e^{\lambda a}\, \frac{1 - e^{\lambda(b-a)}}{1 - e^{\lambda\frac{b-a}{N}}} \ .
\end{aligned}$$

Indem wir $\varrho := \frac{b-a}{N}$ setzen erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{\lambda x}\, dx &= \lim_{\varrho\to 0} \varrho e^{\lambda a} \frac{1 - e^{\lambda(b-a)}}{1 - e^{\lambda\varrho}} \\
&= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho\left(e^{\lambda a} - e^{\lambda b}\right)}{1 - e^{\lambda\varrho}}.
\end{aligned}$$

An dieser Stelle können wir die Regel von de l'Hôpital anwenden, denn Zähler und Nenner konvergieren für $\varrho \to 0$ beide gegen 0. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\lim_{\varrho\to 0} \frac{e^{\lambda a} - e^{\lambda b}}{-\lambda e^{\lambda\varrho}} &= \frac{e^{\lambda a} - e^{\lambda b}}{-\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda b} - e^{\lambda a}\right) \ .
\end{aligned}$$

b) Wir benutzen die folgenden Eigenschaften des Integrals

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx &= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx \\
\int_a^b \lambda f(x)\ dx &= \lambda \int_a^b f(x)\ dx
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \cos x \, dx &= \int_a^b \frac{1}{2}\left[e^{ix}+e^{-ix}\right]\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b e^{ix}\, dx + \frac{1}{2}\int_a^b e^{-ix}\, dx \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{ib}-e^{ia}\right) + \frac{-1}{2i}\left(e^{-ib}-e^{-ia}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{ib}-e^{-ib}-e^{ia}+e^{-ia}\right) \\
&= \sin b - \sin a\ .
\end{aligned}$$

Und analog:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin x \, dx &= \int_a^b \frac{1}{2i}\left[e^{ix}-e^{-ix}\right]\, dx \\
&= \frac{1}{2i}\int_a^b e^{ix}\, dx - \frac{1}{2i}\int_a^b e^{-ix}\, dx \\
&= \frac{-1}{2}\left(e^{ib}-e^{ia}\right) - \frac{-1}{2}\left(e^{-ib}-e^{-ia}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{ib}-e^{-ib}-e^{ia}+e^{-ia}\right) \\
&= -\left(\cos b - \cos a\right)\ .
\end{aligned}$$

3. a) Mit den Funktionen

$$\begin{aligned}
g(s) &:= \int_0^s \cos^3 t \, dt \quad \text{und} \\
h(x) &:= x^3
\end{aligned}$$

gilt $f(x) = g\left(h(x)\right)$. Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ist $g\left(s\right)$ differenzierbar mit $g'\left(s\right) = \cos^3 s$. Aus der Kettenregel folgt daher:

$$f'\left(x\right) = g'\left(h\left(x\right)\right) \cdot h'\left(x\right) = \cos^3\left(x^3\right)\cdot 3x^2$$

b) Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ist $f\left(x\right)$ differenzierbar mit Ableitung $f'\left(x\right) = \cos\left(\cos x\right)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\left|\cos x\right| \le 1 < \frac{\pi}{2}$ und daher ist $\cos\left(\cos x\right) > 0$. Also ist $f\left(x\right)$ stetig und streng monoton wachsend und deshalb eine bijektive Funtion von $\mathbb{R}$ nach $f\left(\mathbb{R}\right)$.
Offensichtlich ist $f\left(\pi\right) = 0$ und daher ist $\pi = f^{-1}\left(0\right)$. Die Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion liefert deshalb:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(0\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f'\left(\pi\right)} = \frac{1}{\cos\left(\cos\pi\right)} = \frac{1}{\cos\left(-1\right)} = \frac{1}{\cos 1}\,.$$