Musterlösung 13

1. a) Im ersten Schritt verwenden wir die Substitution $x = \sin t$, $dx = \cos t\, dt$ und danach partielle Integration. Ausserdem verwenden wir die Beziehung $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \arcsin x\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot t \cdot \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t}_{\downarrow} \underbrace{\frac{\sin 2t}{2}}_{\uparrow}\, dt \\ &= t \cdot \frac{-\cos 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos 2t}{4}\, dt \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} - 0 + \frac{\sin 2t}{8}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{8} + 0 - 0 = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

b) Wir bestimmen zuerst das unbestimmte Integral mittels partieller Integration.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\, dx &= \int \underbrace{\sin x}_{\uparrow}\, \underbrace{\sin^2 x}_{\downarrow}\, dx = -\cos x\, \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} + 2 \int \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \sin x\, dx \\ &= -\cos x + \cos^3 x + 2 \underbrace{\int \sin x\, dx}_{-\cos x + c} - 2 \int \sin^3 x\, dx\end{aligned}$$

Daher ist

$$\int \sin^3 x\, dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + c$$

und wir erhalten

$$\int_0^\pi \sin^3 x\, dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x\Big|_0^\pi = (-1) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - (1) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Alternativ kann man die Substitution $t = \cos x$, $dt = -\sin x\, dx$ verwenden:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^3 x\, dx &= \int_0^\pi \left(1 - \cos^2 x\right) \cdot \sin x\, dx \\ &= \int_1^{-1} \left(1 - t^2\right) \cdot (-1)\, dt = \int_{-1}^1 \left(1 - t^2\right)\, dt \\ &= t - \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

c) Wir substituieren $u = \sqrt{t}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ mit $2u\, du = dt$ und danach verwenden wir partielle Integration.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{t}\, dt &= \int_0^{\pi} \underbrace{\sin u}_{\uparrow} \cdot \underbrace{2u}_{\downarrow}\, du \\
&= -\cos u \cdot 2u\big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos u \cdot 2\, du \\
&= 2\pi - 0 + 2\sin u\big|_0^{\pi} = 2\pi + 0 - 0 = 2\pi
\end{aligned}$$

d) Wir substituieren $u = e^t$, $dt = e^{-t}\, du = \frac{du}{u}$ und verwenden danach partielle Integration.

$$\begin{aligned}
\int e^{3t-e^t}\, dt &= \int e^{3\log u - u} \cdot \frac{1}{u}\, du = \int \underbrace{u^2}_{\downarrow} \underbrace{e^{-u}}_{\uparrow}\, du \\
&= -u^2 e^{-u} + \int \underbrace{2u}_{\downarrow} \underbrace{e^{-u}}_{\uparrow}\, du \\
&= -u^2 e^{-u} - 2ue^{-u} + \int 2e^{-u}\, du \\
&= -u^2 e^{-u} - 2ue^{-u} - 2e^{-u} + c \\
&= -e^{-e^t}\left(e^{2t} + 2e^t + 2\right) + c
\end{aligned}$$

e)

$$\int \frac{x^3}{x^4-1}\, dx = \int \frac{\left(\frac{1}{4}x^4\right)'}{x^4-1}\, dx = \frac{1}{4}\log\left(|x^4-1|\right) + c$$

Alternativ kann man diese Aufgabe auch mittels Partialbruchzerlegung lösen.

f) Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\sqrt{x}}_{\uparrow} \underbrace{\log x}_{\downarrow}\, dx &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x - \int \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{x}\, dx \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x - \int \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\, dx \\
&= +\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + c.
\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch zuerst $t = \sqrt{x}$ substituieren und dann auf analoge Weise partiell integrieren.

Siehe nächstes Blatt!

g) Wir verwenden die Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$, für welche $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ und $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ gilt.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\cos x} &= \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{2\,dt}{1+t^2+1-t^2} = \int 1\,dt = t + c = \tan\frac{x}{2} + c\end{aligned}$$

h) Mit der Substitution $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$ erhalten wir

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t + c = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + c.$$

i) Beachte, dass $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$ eine Zerlegung in paarweise teilerfremde irreduzible Polynome ist. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{x^4-1}$ lautet also:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-1}$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\begin{aligned}1 &= (ax+b)(x+1)(x-1) + c\left(x^2+1\right)(x-1) + d\left(x^2+1\right)(x+1) \\ &= ax^3 + bx^2 - ax - b + c\left(x^3 - x^2 + x - 1\right) + d\left(x^3 + x^2 + x + 1\right) \\ &= (a+c+d)\,x^3 + (b-c+d)\,x^2 + (-a+c+d)\,x + (-b-c+d)\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} & a & & & + c & + & d & = & 0 \\ & & & b & - c & + & d & = & 0 \\ - & a & & & + c & + & d & = & 0 \\ & & - & b & - c & + & d & = & 1 \end{array}\right.$$

Die erste und dritte Zeile liefern sofort, dass $c = -d$ (via Addition) und $a = 0$ (via Subtraktion) sein müssen. Mit der zweiten Zeile folgt dann, dass $b = 2c$ ist. Setzt man dies in die vierte Zeile ein, so erhält man, dass $c = -\frac{1}{4}$ ist, und damit haben wir die Lösungen:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & -\frac{1}{2} \\ c & = & -\frac{1}{4} \\ d & = & \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Bitte wenden!

Aus Serie 9 aufgabe 3 f) ist bekannt, dass $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$ gilt, damit ist also

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^4-1} &= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} \\
&= -\frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\log|x+1| + \frac{1}{4}\log|x-1| + c \\
&= -\frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.
\end{aligned}$$

j) Wir berechnen dieses Integral durch die Substitution $y = \sqrt{x-1}$. Dies ist erlaubt, denn die Funktion $x \mapsto \sqrt{x-1}$ ist auf $[2,5]$ differenzierbar, und ihre Ableitung ist stetig. Es ist $x = y^2+1$, $dx = 2y\,dy$. und damit folgt

$$\begin{aligned}
&\int_2^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\,dx = \int_{\sqrt{2-1}}^{\sqrt{5-1}} \frac{y}{(y^2+1)+1}\cdot 2y\,dy = 2\int_1^2 \frac{y^2}{y^2+2}\,dy \\
&= 2\int_1^2 \left(1 - \frac{2}{y^2+2}\right)\,dy.
\end{aligned}$$

Weiter betrachten wir die Substitution $y = \sqrt{2}\cdot z$, $dy = \sqrt{2}\,dz$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_2^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\,dx = 2\int_1^2 \left(1 - \frac{2}{y^2+2}\right)\,dy \\
&= 2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{2}{\sqrt{2}}} \left(1 - \frac{2}{2(z^2+1)}\right)\sqrt{2}dz \\
&= 2\sqrt{2}\,(z - \arctan z)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \\
&= 2\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2} - \arctan(\sqrt{2}) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \arctan(1/\sqrt{2})\right)\right) \\
&= 4 - 2\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}) - 2 + 2\sqrt{2}\arctan(1/\sqrt{2}) \\
&= 2 - 2\sqrt{2}\cdot(\arctan(\sqrt{2}) - \arctan(1/\sqrt{2})).
\end{aligned}$$

2. **a)** Die Funktion $x \mapsto \frac{\log x}{x}$ ist auf $\mathbb{R}^{>0}$ definiert und stetig. Für alle $x > 0$ erhalten wir

$$\int \frac{\log x}{x}\,dx = \int (\log x)' \log x\,dx = \int \left(\frac{(\log x)^2}{2}\right)'\,dx = \frac{(\log x)^2}{2} + c\,.$$

b) Die Funktion $x \mapsto \log x$ ist auf $\mathbb{R}^{>0}$ definiert und stetig. Ihr Wert ist 0 genau dann, wenn $x = 1$ ist. Somit ist die Funktion $x \mapsto \frac{x}{\log x}$ auf $]0,1[\cup]1,+\infty[$ definiert und stetig, und somit das unbestimmte Integral $\int \frac{x}{\log x}\,dx$ dort definiert. Dieses Integral ist nicht als elementare Funktionen darstellbar.

Siehe nächstes Blatt!

c) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x \log x}$ ist auf $]0,1[\cup]1,+\infty[$ definiert und stetig. Wir rechnen

$$\int \frac{1}{x \log x}\, dx = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x}\, dx = \int \frac{(\log)'(x)}{\log x}\, dx = \int (\log|\log x|)'\ dx$$
$$= \log|\log x| + c$$

Achtung: Eine beliebige Stammfunktion F von $\frac{1}{x \log x}$ auf $]0,1[\cup]1,+\infty[$ hat die Gestalt

$$F(x) = \log|\log x| + \begin{cases} c_1 & \text{falls } 0 < x < 1 \\ c_2 & \text{falls } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

für Konstanten c_1, c_2. Da der Definitionsbereich kein Intervall ist, können die Konstanten verschieden sein.

d) Die Funktion $x \mapsto x \log x$ ist auf $\mathbb{R}^{>0}$ definiert und stetig. Wir berechnen das unbestimmte Integral durch partielle Integration:

$$\int x \log x\, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x\, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} (\log)'(x)\, dx$$
$$= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c$$

3. a) Zunächst zerlegen wir die gegebene rationale Funktion durch Polynomdivion in die Summe eines Polynoms p und eines rationalen Anteils r, so dass der Grad des Zählers von r kleiner ist als der Grad des Nenners.

$$(2x^3 - 14x^2 + 14x + 30) : (x^2 - 4) = 2x - 14 + \frac{22x - 26}{x^2 - 4}.$$

Der Nenner von $r(x) = \frac{22x-26}{x^2-4} = \frac{22x-26}{(x-2)(x+2)}$ hat die beiden einfachen Nullstellen -2 und 2. Daher machen wir für die Partialbruchzerlegung von r den Ansatz

$$r(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

mit Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. Um diese zu bestimmen, bilden wir den Hauptnenner und formen um zu

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)}.$$

Da dies gleich $r(x)$ sein soll, müssen A und B für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$A(x+2) + B(x-2) = 22x - 26$$

Bitte wenden!

erfüllen. Indem wir die beiden Nullstellen ± 2 des Nenners einsetzen, erhalten wir

$$4A = 18 \Leftrightarrow A = \frac{9}{2} \quad \text{und} \quad -4B = -70 \Leftrightarrow B = \frac{35}{2}.$$

Die gesuchte Partialbruchzerlegung ist damit

$$\frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 2} = 2x - 14 + \frac{9/2}{x-2} + \frac{35/2}{x+2}.$$

b) Zunächst gilt es, alle Nullstellen des Nennerpolynoms $x^4 - 6x^2 + 8x - 3$ zu bestimmen. Da -3 und 1 Nullstellen sind, enthält der Nenner die Linearfaktoren $x+3$ und $x-1$. Polynomdivision des Nenners durch diese Linearfaktoren liefert

$$(x^4 - 6x^2 + 8x - 3) : (x+3) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

und

$$\begin{aligned}(x^4 - 6x^2 + 8x - 3) : (x+3)(x-1) &= (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x-1)\\ &= x^2 - 2x + 1\\ &= (x-1)^2.\end{aligned}$$

Es gilt also $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x-1)^3(x+3)$, das heisst der Nenner hat -3 als einfache und 1 als dreifache Nullstelle. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung ist daher

$$\frac{x^2 - 5x + 8}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B}{x+3}$$

mit reellen Konstanten A_1, A_2, A_3, B. Wir formen um zu

$$\frac{x^2 - 5x + 8}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A_1(x-1)^2(x+3) + A_2(x-1)(x+3) + A_3(x+3) + B(x-1)^3}{(x-1)^3(x+3)}.$$

Nun bestimmen wir die Konstanten durch Vergleich der Polynome im Zähler, deren Werte für jedes $x \in \mathbb{R}$ gleich sein soll. Zunächst erhalten wir A_3 und B durch Einsetzen von $x = 1$ bzw. $x = -3$ in die Zählerpolynome:

$$4 = 4A_3 \Leftrightarrow A_3 = 1 \quad \text{und} \quad 32 = -64B \Leftrightarrow B = -\frac{1}{2}.$$

Indem wir das Zählerpolynom der rechten Seite ausmultiplizieren, erhalten wir weiter

$$x^2 - 5x + 8 = \left(A_1 - \frac{1}{2}\right) x^3 + \left(A_1 + A_2 + \frac{3}{2}\right) x^2 + \text{Terme niedrigerer Ordnung}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir somit

$$A_1 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad A_2 = -1.$$

Die gesuchte Partialbruchzerlegung ist damit

$$\frac{x^2 - 5x + 8}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1/2}{x+3}.$$