Musterlösung 14

1. **a)** Die Funktion $x \mapsto \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, stetig und positiv. Wegen $\cosh(-x) = \cosh x$ gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\cosh x} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x}$$

falls letzteres Integral konvergiert. Für alle $x > 0$ gilt

$$e^x + e^{-x} \geq e^x \geq \frac{x^2}{2}.$$

Daher ist

$$\frac{1}{\cosh x} \leq \frac{4}{x^2}$$

für alle hinreichend grossen x. Des Weiteren können wir Division durch Null ausschliessen, da $\cosh x \geq 1$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert das Integral also.

Alternative: Mit Hilfe der Substitution $y = e^x$ kann man das unbestimmte Integral explizit ausrechnen:

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \ldots = 2 \cdot \arctan(e^x) + c$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} &= 2 \cdot \arctan e^x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} 2 \cdot \arctan e^x - \lim_{x \to -\infty} 2 \cdot \arctan e^x \\
&= \lim_{t \to +\infty} 2 \cdot \arctan t - \lim_{t \to 0+} 2 \cdot \arctan t = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.
\end{aligned}$$

b) Die Funktion $x \mapsto \frac{\tan x}{x}$ ist auf $]0, \pi/2[$ definiert und stetig. Das Integral teilt sich auf in die beiden Integrale

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{x}\, dx \text{ und } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\tan x}{x}\, dx.$$

Mit der Regel von de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \tan^2 x}{1} = 1.$$

Bitte wenden!

Daher setzt sich die Funktion stetig fort auf $[0, \frac{\pi}{4}]$, und $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{x}\, dx$ wird ein gewöhnliches Riemann-Integral.

Für das andere Integral substituieren wir $x = \frac{\pi}{2} - y$, $dx = -dy$. Dies liefert

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\tan x}{x}\, dx = -\int_{\pi/4}^{0} \frac{\tan(\pi/2 - y)}{\pi/2 - y}\, dy = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos y}{(\pi/2 - y)\cdot \sin y}\, dy$$

falls letzteres Integral konvergiert. Für alle $y \in]0, \pi/4]$ gilt nun

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin y \leq y \\ \cos y \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\cos y}{(\pi/2 - y)\cdot \sin y} \geq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{y}.$$

Nach dem Minorantenkriterium divergiert das Integral also.

c) Die Funktion $x \mapsto \log x$ is auf $]0, 1]$ definiert und stetig. Für jedes $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x \to 0^+} |\log x| \cdot x^\alpha = \lim_{t \to +\infty} t \cdot (e^{-t})^\alpha = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{\alpha t}} = 0.$$

Somit existiert ein $C > 0$, so dass für jedes $x \in]0, 1]$ gilt

$$|\log x| \leq \frac{C}{x^\alpha}.$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert das Integral $\int_0^1 \log x\, dx$ also. Wir können dieses Integral sogar explizit berechnen. Durch partielle Integration berechnen wir eine Stammfunktion von $\log x$. Es gilt

$$\int \log x\, dx = \int x' \cdot \log x\, dx = x \log x - \int x \cdot (\log x)'\, dt = x \log x - \int 1\, dt = x \log x - x + c.$$

Daraus folgt

$$\int_0^1 \log x\, dx = (x \log x - x)\Big|_0^1 = (1 \log 1 - 1) - \lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon \log \varepsilon - \varepsilon) = -1.$$

d) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x - x^3}}$ ist auf $]0, 1[$ definiert und stetig. Es gibt Probleme an den Stellen 0 und 1.

An der Stelle 0: Es gilt $\sqrt{x - x^3} = \sqrt{x(1 - x^2)} = \sqrt{x(1 + x)(1 - x)}$, und daher ist für jedes $x \in]0, \frac{1}{2}]$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x - x^3}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{x(1 - x^2)}} \right| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{x\left(1 - \frac{1}{4}\right)}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Daher konvergiert das Integral an der Stelle 0, nach dem Majorantenkriterium.

An der Stelle 1: Es gilt $\sqrt{x-x^3} = \sqrt{x(1-x^2)} = \sqrt{x(1+x)(1-x)}$, und daher ist für jedes $x \in [\frac{1}{2}, 1[$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x-x^3}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x(1+x)(1-x)}}\right| \le \left|\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)(1-x)}}\right| \le \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Also konvergiert das Integral auch an der Stelle 1, nach dem Majorantenkriterium.

Insgesamt erhalten wir also, dass das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}$ konvergiert.

e) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^4-x^5}$ ist auf $]0,1[$ definiert und stetig. Es gibt Probleme an den Stellen 0 und 1. Bei 0 haben wir

$$\frac{1}{x^4-x^5} = \frac{1}{x^4(1-x)} \ge \frac{1}{x^4}$$

für jedes $x \in]0,1[$. Also divergiert das Integral bei 0. Ein ähnliches Problem besteht an der Stelle 1.

2. **a)** Mit der Substitution $t = \sqrt{x}$, $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= 2\int_1^\infty e^{-t}\,dt \\
&= 2\cdot \lim_{a\to\infty} \int_1^a e^{-t}\,dt \\
&= 2\cdot \lim_{a\to\infty} -e^{-t}\Big|_1^a \\
&= 2\cdot \lim_{a\to\infty} -e^{-t} + 2\cdot e^{-1} \\
&= \frac{2}{e}.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) Wir integrieren partiell:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \underbrace{e^{-x}}_{\uparrow} \underbrace{\sin x}_{\downarrow}\, dx &= \underbrace{\lim_{a\to\infty} (-e^{-x}\sin x)\Big|_0^a}_{=0} - \int_0^\infty (-e^{-x}) \cos x \, dx \\
&= \int_0^\infty \underbrace{e^{-x}}_{\uparrow} \underbrace{\cos x}_{\downarrow}\, dx \\
&= \lim_{a\to\infty} (-e^{-x}\cos x)\Big|_0^a - \int_0^\infty (-e^{-x})(-\sin x)\, dx \\
&= \underbrace{\lim_{a\to\infty} (-e^{-a}\cos a)}_{=0} + \underbrace{e^{-0}\cos 0}_{=1} - \int_0^\infty e^{-x}\sin x \, dx \\
&= 1 - \int_0^\infty e^{-x} \sin x \, dx.
\end{aligned}$$

Daher ist also

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin x\, dx = \frac{1}{2}.$$

c) Es sei $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$. Mit der Substitution $t = 1 - \frac{x}{n}$, $dt = -\frac{dx}{n}$, $x = (1-t)\cdot n$ und der geometrischen Summe ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_0^n \frac{1-(1-x/n)^n}{x}\, dx &= -\int_1^0 \frac{1-t^n}{1-t}\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\, dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} t^k \, dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 t^k\, dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k+1}}{k+1}\Bigg|_0^1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Dieses Integral entspricht als genau der n-ten Partialsumme der harmonischen Reihe.

d) Wir substituieren $t = \log x$, $dt = \frac{dx}{x}$ und erhalten

$$\int_{10}^\infty \frac{dx}{x\cdot \log x \cdot \log^2(\log x)} = \int_{\log 10}^\infty \frac{dt}{t\cdot \log^2 t}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Wiederum bietet sich die Substitution $u = \log t$, $du = \frac{dt}{t}$ an. Dies führt zu

$$\begin{aligned}
\int_{\log 10}^{\infty} \frac{dt}{t \cdot \log^2 t} &= \int_{\log(\log 10)}^{\infty} \frac{1}{u^2}\, du \\
&= -\frac{1}{u}\Big|_{\log(\log 10)}^{\infty} \\
&= \underbrace{\lim_{u\to\infty}\left(-\frac{1}{u}\right)}_{=0} - \left(-\frac{1}{\log(\log 10)}\right) \\
&= \frac{1}{\log(\log 10)}.
\end{aligned}$$

3. Für alle $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ und alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $|t^z| = |t^{\mathrm{Re}(z)}|$. Daher genügt es die Konvergenz für alle $z \in \mathbb{R}^{>0}$ nachzuweisen. Sei also $z \in \mathbb{R}^{>0}$. Die Grenzen 0 und ∞ bereiten beide Probleme.

- Für alle $t \in]1, 0]$ ist $t^{z-1}e^{-t} \leq t^{z-1}$. Da $z > 0$ ist konvergiert das Integral $\int_0^1 t^{z-1}\, dt$ und somit konvergiert, nach dem Majorantenkriterium, auch das Integral $\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\, dt$.
- Für alle $t \in [1, \infty[$ gilt $t^{z-1}e^{-t} \leq c \cdot e^{-t/2}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine von z abhängige Konstante ist. Da das Integral $\int_1^\infty e^{-t/2}\, dt$ konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch das Integral $\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt$.

Ingesamt erhalten wir also, dass das Integral $\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ konvergiert.

$i)$ Wenn wir die Gammafunktion

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\, dt$$

partiell integrieren, dann erhalten wir, für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty \underbrace{t^z}_{\downarrow}\, \underbrace{e^{-t}}_{\uparrow}\, dt \\
&= \underbrace{t^z\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty \left(z\, t^{z-1}\right)\left(-e^{-t}\right) dt \\
&= z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt = z\,\Gamma(z).
\end{aligned}$$

$ii)$ Mit der Teilaufgabe $i)$ können wir $\Gamma(n+1)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ berechnen; es gilt nämlich:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n\,(n-1)\,\Gamma(n-1) = \cdots = n!\,\Gamma(1) = n!\underbrace{\int_0^\infty e^{-t}\, dt}_{=1} = n!$$

Bitte wenden!

Um den Wert der Gammafunktion an der Stelle $\frac{1}{2}$ zu bestimmen, wählen wir die Substitution $t = y^2$, $dt = 2y\,dy$, und berechnen

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt = \int_0^\infty y^{-1} e^{-y^2} 2y\,dy = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}.$$