

Schnellübung 1

1. Von den folgenden Aussagen ist genau eine richtig.

- (i) Fritz hat mehr als tausend Bücher.
- (ii) Fritz hat weniger als tausend Bücher.
- (iii) Fritz hat mindestens ein Buch.
- (iv) Fritz hat kein Buch.

Wieviele Bücher hat Fritz?

2. Gegeben sind die Funktionen $f, g, h, j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in Polarkoordinaten.

- a) $f(r, \varphi) = r^2$
- b) $g(r, \varphi) = \tan \varphi$
- c) $h(r, \varphi) = r^2 \sin(2\varphi)$
- d) $j(r, \varphi) = r^2(1 + \sin(2\varphi))$.

Bestimme den Ausdruck für f, g, h und j in kartesischen Koordinaten.

3. Beschreibe und zeichne das Niveaulinienportrait folgender Funktionen:

- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) := x^2 + y^2$
- b) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto g(x, y) := xy$
- c) $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto h(x, y) := \frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2}$

4. Für semipositive ganze Zahlen $0 \leq k \leq n$ definieren wir den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Bitte wenden!

a) Zeige: Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

b) Zeige mit Induktion nach n , dass $\binom{n}{k}$ für alle k mit $0 \leq k \leq n$ eine semipositive ganze Zahl ist. Hinweis: Benutze **a**).

c) Beweise den *Binomischen Lehrsatz*: Für beliebige Zahlen a, b und $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ ist

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad \text{Hinweis: Benutze **a**) und Induktion.}$$

d) Welchen Wert hat $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$? Hinweis: Benutze **c**).