Schnellübung 2

1. Seien X, Y, Z Mengen sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Die **Komposition** von f und g ist definiert als die Abbildung $h : X \to Z$, die gegeben ist durch die Vorschrift

$$h(x) = g(f(x))$$

für $x \in X$. Man verwendet für diese Abbildung das Symbol $g \circ f$.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Wenn f und g injektiv sind so ist auch $g \circ f$ injektiv.

b) Wenn zwei der Abbildungen $f, g, g \circ f$ bijektiv sind, dann ist auch die dritte bijektiv.

c) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch g injektiv.

d) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch f injektiv.

e) Wenn g surjektiv ist, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

2. Bestimme die Konstanten α und β so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta & \text{, falls } x \leq -1 \\ (\alpha + \beta)x & \text{, falls } -1 < x < 1 \\ x^2 + \alpha x - \beta & \text{, falls } x \geq 1 \end{cases}$$

stetig wird, und skizziere ihren Graphen!

3. Sind die folgenden Funktionen stetig?

a)

$$f : [-1, 4] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Bitte wenden!

b)

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x}{x+y} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad ,$$

wobei $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x,y \geq 0 \text{ und } y \leq \frac{1}{2}x\right\}$ ist.

4. Zeige, dass die Funktion

$$f :]-1,1[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

bijektiv ist.

(Hinweis: Zwischenwertsatz, Monotonie)