Schnellübung 4

1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius ϱ der folgenden Reihen

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)^3} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\log\, n)^n\, x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sqrt{(3n-2)2^n}\, x^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n} x^n$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^n} x^{5n}$

2. Mit Hilfe der Fibonacci-Folge

$$a_0 := 0\,, \qquad a_1 := 1\,, \qquad a_n := a_{n-1} + a_{n-2}\,, \quad \forall\; n \geq 2\,,$$

wird folgende Potenzreihe gebildet:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 5z^5 + \dots\,.$$

Zeige:

a) Diese Reihe konvergiert mindestens für $|z| < \frac{1}{2}$ und stellt dort eine Funktion $f(z)$ dar.

b) Es ist $f(z) = \dfrac{z}{1-z-z^2}$.

Hinweis: Zeige $(1-z-z^2)f(z) = z$.

c) Die Funktion f besitzt eine Zerlegung der Form

$$f(z) = \frac{A}{1-\lambda z} + \frac{B}{1-\mu z}$$

und lässt sich daher als Summe von zwei geometrischen Reihen schreiben. Dies liefert eine zweite Darstellung von f als Potenzreihe und damit einen geschlossenen Ausdruck für die n-te Fibonacci-Zahl a_n.

Bitte wenden!

3. Betrachten Sie die durch $z \mapsto \frac{1}{z}$ gegebene Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Was sind die Bilder

- **a)** der reellen Achse $\big\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;:\; \operatorname{Im} z = 0\big\}$,
- **b)** eines Kreises $\big\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = r\big\}$, wobei $0 < r \in \mathbb{R}$ sei,
- **c)** der imaginären Achse $\big\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;:\; \operatorname{Re} z = 0\big\}$,
- **d)** der Geraden $\big\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;:\; \operatorname{Re} z = 1\big\}$.

4. Welche der folgenden Funktionen wächst für $t \to \infty$ am schnellsten, welche am langsamsten?

$$f(t) = t^{\sqrt{\log t}}\,, \quad g(t) = (\log t)^{\log t}\,, \quad h(t) = \exp(\sqrt{t}/\log t).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Logarithmen von f, g und h.