Schnellübung 5

1. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

a) $f_1 :]0, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto (4x^2 - 2x\sqrt{x} + x)(2x + x^{-5})$,

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{3x}(3 \sin x - \cos x)$,

c) $f_3 :]0, \pi[\to \mathbb{R}, x \mapsto \log(\sin x)$,

d) $f_4 :]5, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\frac{x^2-8x+15}{x^2+3x+2}}$,

e) $f_5 :]0, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^{\log x}$.

2. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige:

a) Ist f stetig, so liegt (echt) zwischen je zwei Nullstellen von f eine lokale Extremalstelle.

b) Ist f differenzierbar, so ist die Anzahl ihrer Nullstellen $\leq 1+$ der Anzahl der Nullstellen von f'.

c) Die Gleichung $2^x = x^2$ besitzt genau 3 reelle Lösungen.

3. Untersuche ob die folgenden Funktionen ein Maximum besitzen oder nicht.

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^3-x}{x^2+2}$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{-x^4+x^3+x-1}{x^2+3}$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x^2} \cos x$.

e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x^4}(x^2 - 1)$.

Bitte wenden!

4. **a)** Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Minimal- und Maximalstellen der Funktion

$$f_\lambda(x) = x^4 + \lambda x^2$$

in Abhängigkeit des Parameters $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Zeichnen Sie in der λ-x-Ebene die Menge aller Paare (λ, x), für die x ein kritischer Punkt der Funktion f_λ ist.