D-MATH
Prof. Richard Pink

Analysis I D-ITET

HS 2013

Schnellübung 6

1. Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes für alle $x > 0$ die folgenden Ungleichungen:

a) $1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1$,

b) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$.

Hinweis. Wenden Sie den Mittelwertsatz auf die auf $]0, \infty[$ definierten Funktionen $x \mapsto \log x$ bzw. $x \mapsto \sqrt{1+x}$ an.

2. Bestimmen Sie jeweils das Taylorpolynom 4. Grades um den Punkt x_0 für die folgenden Funktionen und Punkte:

a) $f :]-1, 1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x}\ ,\ x_0 = \dfrac{1}{2}$,

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^7\ ,\ x_0 = 2$,

c) $f :]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, x \mapsto \log\cos x\ ,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

3. Es sei $f(x) = \sin x - \frac{2}{3}x$. Gib die Rekursionsbeziehung für die im Newton-Verfahren verwendete Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

4. Zeige, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$$

existiert und im Intervall $[0, 1]$ liegt.

Hinweis: Verwende die Beziehung:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 2}\ :\ \log n = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx.$$

Bemerke, dass die Funktion $[1, \infty[\to]0, \infty[\ : x \mapsto \frac{1}{x}$ monoton fallend ist und verwende die Monotonie des Riemann-Integrals.