D-MATH | Analysis I D-ITET | HS 2013

Prof. Richard Pink

Serie 11

1. Berechnen Sie mit Hilfe der Taylor-Approximation einen Näherungswert für $\sqrt[3]{65}$ (die Angabe als Bruch genügt). Wieviele Glieder müssen berücksichtigt werden, damit der Abschätzungsfehler kleiner als 10^{-5} wird?

2. Berechnen Sie die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$, indem Sie eine allgemeine Darstellung der n-ten Ableitung von f bestimmen. Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Reihe sowie das Restglied der Ordnung n.

3. Diskutieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}\log(1+e^{2x})+\arctan(e^x)$ im Hinblick auf Extrema, Wendepunkte, Konvexität, und ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$.

4. Fassen Sie den Kehrwert einer Zahl $c \in]0, 2[$ als Nullstelle der Funktion

$$f :]0, 2[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x} - c$$

auf und wenden Sie das Newtonsche Verfahren mit dem Anfangswert $x_0 = 1$ an.

a) Geben Sie die Rekursionsformel für x_{n+1} in Termen von x_n an. Sie enthält — oh Wunder — keine Division!

b) Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für den Fehler im Schritt n, das heisst für

$$u_n := \frac{1}{c} - x_n.$$

c) Wie gross ist der Fehler nach 10 Schritten für $c = \frac{3}{2}$?

Abgabe: Freitag 6.12.2013 in die Fächlein der Übungsleiter im HG F 28 .

5. Online-Abgabe

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Sonntag 8.12.2013, 17:00 Uhr.

Bitte wenden!

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist im allgemeinen *nicht* richtig?

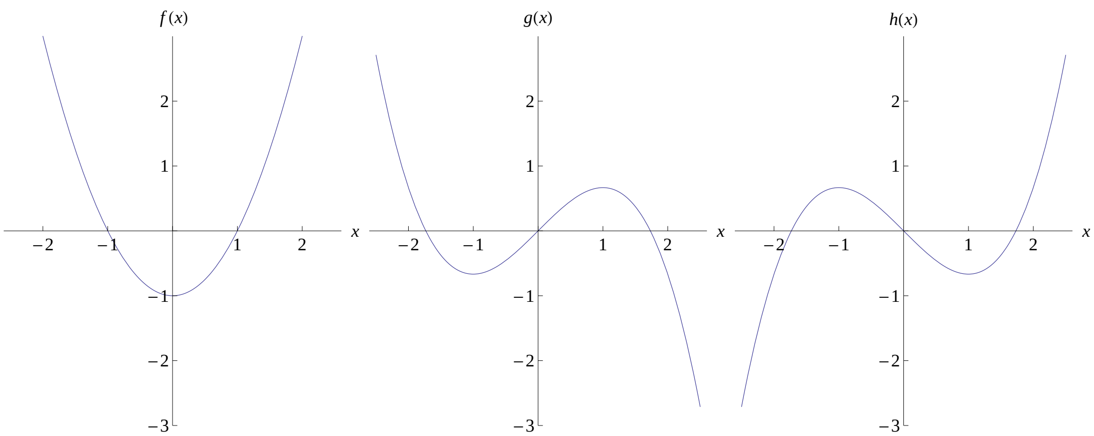
(a) f hat eine Taylorreihe bei $x_0 = 0$.

(b) Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist ≥ 0, aber nicht notwendig > 0.

(c) Dort, wo die Taylorreihe konvergiert, stellt sie die Funktion f dar.

(d) Wenn f durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist diese gleich der Taylorreihe.

2. Das folgende Bild zeigt die Graphen dreier Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, von denen eine die Ableitung einer der anderen ist. Welche Aussage ist richtig?



(a) $f' = g$

(b) $f' = h$

(c) $g' = f$

(d) $g' = h$

(e) $h' = f$

(f) $h' = g$

Siehe nächstes Blatt!

3. Welche der folgenden Schlussfolgerungen über eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist *falsch*?

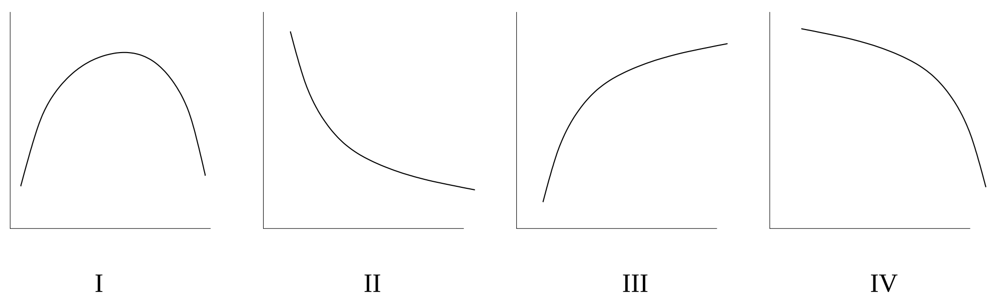
(a) Ist f monoton wachsend, so ist $f' \geq 0$.

(b) Ist $f' = 0$, so ist f konstant.

(c) Ist $f' > 0$ auf $]a, b[$, so ist f streng monoton wachsend.

(d) Ist f streng monoton fallend, so ist $f' < 0$ auf $]a, b[$.

4. Für welche der folgenden Kurven gilt $f'' < 0$?



(a) I und II

(b) II

(c) II und III

(d) I und III

(e) I, III und IV