D-MATH | Analysis I D-ITET | HS 2013

Prof. Richard Pink

# Serie 12

**1.** **a)** Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

**b)** Sei $f$ stetig und nicht-negativ auf $[a, b]$ und sei $\int_a^b f\,dx = 0$. Zeigen Sie: $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

**2.** Seien $a, b$ reelle Zahlen mit $a < b$.

**a)** Berechnen Sie mit Hilfe von Riemannschen Summen für jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ das Integral

$$\int_a^b e^{\lambda x} dx.$$

**b)** Berechnen Sie unter Verwendung von (a) die Integrale

$$\int_a^b \cos x\; dx \quad \text{und} \quad \int_a^b \sin x\; dx.$$

**3.** **a)** Berechne die Ableitung von $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \cos^3 t\,dt$.

**b)** Berechne $(f^{-1})'(0)$ für $f(x) = \displaystyle\int_\pi^x \cos(\cos t)\,dt$.

**Abgabe:** Freitag 13.12.2013 in die Fächlein der Übungsleiter im HG F 28 .

**4. Online-Abgabe**

**Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben:** Sonntag 15.12.2013, 17:00 Uhr.

**Bitte wenden!**

**1.** Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(\xi) = 0$ für ein $\xi \in I$ und sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine mit Hilfe des Newton-Verfahrens bestimmte Folge in $I$ mit $x_n \to \xi$ für $n \to \infty$. Was bedeutet die quadratische Konvergenz des Verfahrens? Es gibt . . .

(a) für jedes $\epsilon > 0$ ein $N > 0$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon^2$.

(b) für jedes $\epsilon > 0$ ein $N > 0$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|x_n - \xi| < \epsilon^2$.

(c) ein $C > 0$ und ein $N > 0$ so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|x_{n+1} - \xi| \leq C|x_n - \xi|^2$.

(d) ein $C > 0$ und ein $N > 0$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|x_n - \xi| \leq C\frac{1}{n^2}$.

**2.** Welche der folgenden Implikationen für eine Funktion $f$ ist richtig?

(a) $f$ ist differenzierbar $\Longrightarrow$ $f$ ist stetig $\Longrightarrow$ $f$ ist integrierbar.

(b) $f$ ist integrierbar $\Longrightarrow$ $f$ ist differenzierbar $\Longrightarrow$ $f$ ist stetig.

(c) $f$ ist stetig $\Longrightarrow$ $f$ ist differenzierbar $\Longrightarrow$ $f$ ist integrierbar.

(d) $f$ ist integrierbar $\Longrightarrow$ $f$ ist stetig $\Longrightarrow$ $f$ ist differenzierbar.

**3.** Den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung für eine stetige Funktion $f$ auf $[a, b]$ gibt es in verschiedenen Versionen. Welche ist keine davon?

(a) Falls $F$ eine Stammfunktion von $f$ ist, dann gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

(b) $\int_a^t f(x)\,dx$ ist eine Stammfunktion von $f(t)$.

(c) Es existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a)$.

(d) Die Funktion $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ ist differenzierbar mit Ableitung $f(x)$.

**Siehe nächstes Blatt!**

**4.** Welches der folgenden Integrale stimmt im Allgemeinen nicht mit den anderen überein?

(a) $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$

(b) $\int_a^b (f(x) - g(x))\, du$

(c) $\int_b^a (g(x) - f(x))\, dx$

(d) $\int_a^b (f(t) - g(t))\, dt$