Serie 13

1. Bestimme die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 x \arcsin x \, dx$,

b) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3 x \, dx$,

c) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t}) \, dt$,

d) $\displaystyle\int e^{3t-e^t} \, dt$,

e) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4-1} \, dx$,

f) $\displaystyle\int \sqrt{x} \log x \, dx$,

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$,

h) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$,

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-1} \, dx$,

j) $\displaystyle\int_2^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x+1} \, dx$.

2. Drei der vier folgenden unbestimmten Integrale sind als elementare Funktionen darstellbar. Berechne sie und gebe den jeweiligen Definitionsbereich an.

a) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x} \, dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{x}{\log x} \, dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x \log x} \, dx$,

d) $\displaystyle\int x \log x \, dx$.

3. Zerlegen Sie die folgenden rationalen Funktionen mittels Polynomdivision und Partialbruchzerlegung so weit wie möglich.

a) $\displaystyle\frac{2x^3-14x^2+14x+30}{x^2-4}$

b) $\displaystyle\frac{x^2-5x+8}{x^4-6x^2+8x-3}$

Hinweis zu b): Der Nenner besitzt die Nullstellen -3 und 1.

4. Online-Abgabe

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Sonntag 22.12.2013, 17:00 Uhr.

Bitte wenden!

1. Wir rechnen

$$
\begin{aligned}
f(x) = (x-1)^4 = \int 4(x-1)^3\,dx = \int (4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)\,dx \\
= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = g(x)
\end{aligned}
$$

und erhalten durch Einsetzen

$$1 = f(0) = g(0) = 0.$$

Wo liegt der Fehler?

(a) Man darf nicht einsetzen.

(b) Die binomische Formel wurde falsch angewendet.

(c) Die Integrationskonstante fehlt.

(d) Es ist trotzdem richtig, weil man Konstanten vernachlässigen darf.

2. Welche der folgenden Rechnungen ist keine korrekte Anwendung der Partiellen Integration?

(a) $\int \sin\varphi \cdot \cos\varphi\, d\varphi = -\cos\varphi \cdot \cos\varphi - \int \cos\varphi \cdot \sin\varphi\, d\varphi$

(b) $\int \sin\varphi \cdot \cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi \cdot \sin\varphi - \int \cos\varphi \cdot \sin\varphi\, d\varphi$

(c) $\int x \cdot \log x\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \log x - \int \frac{x}{2}\, dx$

(d) $\int 2x^2 e^{x^2}\, dx = xe^{x^2} - \int e^{x^2}\, dx$

(e) Alle sind korrekte Anwendungen der Partiellen Integration.

Siehe nächstes Blatt!

3. Welche Substitution, falls überhaupt notwendig, ist im folgenden Integral günstig?

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx$$

(a) Substitution mit $t = \tan x$ und folglich mit $\sin x = t \cdot \cos x$ und $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

(b) Substitution mit $t = \sin x$ und folglich mit $dt = \cos x\,dx$.

(c) Substitution mit $t = \tan \frac{x}{2}$ und folglich mit $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ und $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

(d) Keine Substitution ist notwendig, denn die Gleichung $(\sin^3)'(x) = \cos^2 x$ und die Formel $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$ führen direkt zur Lösung.

Die Probeklausur findet am 15. Januar 2014, von 10:00 - 12:00 Uhr , in den Räumen HG F 5 und HG F 7, statt.