Serie 14 - Ferienserie

1. Entscheide, welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x}$,

b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{x}\, dx$,

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \log x \, dx$,

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}$,

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^4-x^5}$.

2. Bestimme, im Falle der Konvergenz, folgende uneigentliche Integrale:

a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$,

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx$,

c) $\displaystyle\int_{0}^{n} \frac{1-(1-x/n)^n}{x}\, dx,$ wobei $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ ist,

d) $\displaystyle\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \log x \cdot \log^2(\log x)}$.

3. Die Gammafunktion ist definiert durch die Eulersche Identität

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

a) Zeige, dass dieses Integral für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ konvergiert.

b) Zeige die Eigenschaften

$i)$ $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$,
$ii)$ $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.

Bitte wenden!

c) Welchen Wert hat die Gammafunktion an der Stelle $z = \frac{1}{2}$?

Hinweis: Es gilt $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Die Probeklausur findet am 15. Januar 2014, von 10:00 - 12:00 Uhr , in den Räumen HG F 5 und HG F 7, statt.