

Serie 4

1. Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$$

stetig ist. (Finde einen Ausdruck für δ , in Abhängigkeit von ε und (x, y) .)

2. Skizziere den Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) := \frac{1}{2} (1 - \operatorname{sgn}(y)) |x|$$

und stelle fest, wo diese Funktion stetig ist.

3. Es sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, d. h. dass es ein $x \in [0, 1]$ gibt, so dass $f(x) = x$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$, die gegeben ist durch $g(x) = f(x) - x$.

Abgabe: Freitag 18. Oktober 2013 in die Fächlein der Übungsleiter im HG F 28 .

4. **Online-Abgabe**

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Sonntag 20. Oktober 2013, 17:00 Uhr.

1. Was genau besagt der Zwischenwertsatz?

- (a) Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ .
- (b) Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ .
- (c) Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ .
- (d) Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $]a, b[$ wenigstens eine Nullstelle ξ .

2. Die Aufrundungsfunktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$ ist im Punkt $x = 2$

- (a) stetig.
- (b) nur linksseitig stetig.
- (c) nur rechtsseitig stetig.
- (d) beidseitig unstetig.

3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x \cdot \operatorname{sgn}(y) + y \cdot \operatorname{sgn}(x).$$

Bezeichne $U \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge der Punkte, in denen f stetig ist. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- (a) $U = \mathbb{R}^2$.
- (b) $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- (c) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$.
- (d) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$.
- (e) $U = \emptyset$.