Serie 6

1. Es sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl. Für $x_0 \in \,]0, 2/x[$ sei durch

$$x_{n+1} = x_n(2 - x x_n), n \geq 0,$$

rekursiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}}$ erklärt.

a) Berechnen Sie x_1, x_2 und x_3 für $x = 3$ und $x_0 = 0.3$.

b) Zeigen Sie, dass die Folge für jedes $x_0 \in \,]0, 2/x[$ ab $n = 1$ monoton wächst und gegen $1/x$ konvergiert.

2. Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^{>0}}$ auf Konvergenz und geben Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ an, falls dieser existiert.

a) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$

b) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

c) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}$

3. Welche der folgenden Reihen konvergieren? Welche konvergieren sogar absolut?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin(1/n)$

Hinweis: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} C/n^{1+\delta}$, die für alle $\delta > 0$ konvergiert, ist eine wichtige Vergleichs-Reihe um das Majorantenkriterium anzuwenden.

Abgabe: Freitag 1.11.2013 in die Fächlein der Übungsleiter im HG F 28 .

4. Online-Abgabe

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Sonntag 3.11.2013, 17:00 Uhr.

Bitte wenden!

1. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

(a) Die Folge ist monoton wachsend.

(b) Die Folge ist beschränkt.

(c) Die Folge konvergiert gegen 0.

(d) Die Folge ist konvergent.

(e) Der Limes der Folge ist 1.

2. Welche der folgenden Aussagen ist dazu äquivalent, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in $\mathbb{R}$ konvergiert?

(a) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n - a| > 1/n$

(b) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \epsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : |a_n - a| > \epsilon$

(c) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : |a_n - a| > \epsilon$

3. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$

(a) konvergiert.

(b) divergiert gegen $+\infty$.

(c) divergiert gegen $-\infty$.

(d) hat keine der anderen genannten Eigenschaften.