Serie 8

1. Zeige, dass folgende Aussagen gelten:

a) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to 0+} x^x = 1$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\log x}}{e^x} = 0$

c) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \log x$, für jedes $x \in \mathbb{R}^{>0}$.

2. Berechne das Anfangsstück bis einschliesslich z^5 der Potenzreihenentwicklung (um 0) von:

a) $\tan z$,

b) $\arctan z$.

Hinweis: Benutze die Standard-Reihenentwicklungen von $\sin z$ und $\cos z$. Da der Tangens eine ungerade Funktion ist, ist auch der Arcustangens ungerade. Benutze dies und Teil a) um b) zu lösen.

3. Bestimmen Sie die Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Reihenentwicklung

$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Setzen Sie $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, multiplizieren Sie aus und verwenden Sie die Exponentialreihe. Benutzen Sie die Gleichung $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$.

Abgabe: Freitag 15.11.2013 in die Fächlein der Übungsleiter im HG F 28.

4. Online-Abgabe

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Sonntag 17.11.2013, 17:00 Uhr.

Bitte wenden!

1. Welche der folgenden Aussagen ist für alle $z \in \mathbb{C}$ richtig?

(a) $\text{Re}(\exp(z)) = \exp(\text{Re}(z))$.

(b) $\text{Im}(\exp(z)) = \exp(\text{Im}(z))$.

(c) $|\exp(z)| = \exp(|z|)$.

(d) $|\exp(z)| = \exp(\text{Re}(z))$.

(e) $|\exp(z)| = \exp(\text{Im}(z))$.

2. Es seien $a > 1$ und $b > 1$ reelle Zahlen und es seien Funktionen $\exp_a, \exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto a^x$ bzw. $x \mapsto b^x$. Dann unterscheiden sich $\exp_a$ und $\exp_b$ ...

(a) um eine additive Konstante.

(b) um eine multiplikative Konstante.

(c) durch eine Stauchung oder Streckung in Richtung der x-Achse.

(d) nur durch das Vorzeichen.

3. Es seien $a > 1$ und $b > 1$ zwei reelle Zahlen. Dann unterscheiden sich die Funktionen $\log_a, \log_b : \,]0, \infty[\to \mathbb{R}$ ...

(a) um eine additive Konstante.

(b) um eine multiplikative Konstante.

(c) so stark, dass man sie gesondert untersuchen muss.

(d) nur durch das Vorzeichen.

Siehe nächstes Blatt!

4. Die Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{1-2x^2}$ lautet

(a) $1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \ldots$

(b) $1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^6 + \ldots$

(c) $1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 - \ldots$

(d) $1 - x^2 - x^4 - 3x^6 - \ldots$

(e) $1 - x^2 + x^4 - 3x^6 + \ldots$

5. Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ dar?

(a) $(1-x)^{-1}$

(b) $(1-x)^{-2}$

(c) $(1+x)^{-2}$

(d) $x \cdot (1-x)^{-2}$

(e) $x \cdot (1-x)^{-3}$