Serie 9

1. **a)** Beweisen Sie den "hyperbolischen Satz von Pythagoras":

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

b) Beweisen Sie die Formel

$$\operatorname{arsinh} y = \log(y + \sqrt{y^2+1}).$$

c) Zerlegen Sie $\cosh(a+ib)$ in Real- und Imaginärteil, wobei a und b reelle Zahlen sein sollen.

2. Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei eine Funktion definiert durch

$$f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^\alpha \sin(1/x) & x > 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass f_α an der Stelle 0 ...

a) stetig ist.

b) differenzierbar ist und die Ableitung dort stetig ist.

c) differenzierbar ist und die Ableitung dort *nicht* stetig ist.

3. Differenziere die folgenden Funktionen.

a) $9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

b) $\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}$ für $x \in \mathbb{R}^{>4}$,

c) $\log(\cosh x)$ für $x \in \mathbb{R}$,

d) $\log(\log(\log x))$ für $x \in \mathbb{R}^{>e}$,

e) $3^x x^3$ für $x \in \mathbb{R}$,

Bitte wenden!

f) $\arctan(x - \sqrt{x^2+1})$ für $x \in \mathbb{R}$.

4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Es gelte zusätzlich $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Beweisen Sie die *Quotientenregel*, d.h. zeigen Sie, dass die Funktion $\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$, differenzierbar ist mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

Abgabe: Freitag 22.11.2013 in die Fächlein der Übungsleiter im HG F 28 .

5. Online-Abgabe

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Sonntag 24.11.2013, 17:00 Uhr.

1. Welche Funktion wird durch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}+(-1)^k x^{2k+2}}{(2k+1)!}$ dargestellt?

(a) $\sin x + \sinh x$

(b) $x \sin x + \frac{1}{x} \sinh x$

(c) $x \sin x + x \sinh x$

(d) $x \cos x + \frac{1}{x} \cosh x$

2. Welche der folgenden Funktionen ist nicht gleich den anderen?

(a) $\frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$

(b) $\operatorname{artanh} y$

(c) $\frac{\operatorname{arsinh} y}{\operatorname{arcosh} y}$

(d) $\log \sqrt{1+y} - \log \sqrt{1-y}$

Siehe nächstes Blatt!

3. Welche der folgenden Formeln ist *falsch*?

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(b) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$

(c) $2\cosh^2 x = 1 + \cosh 2x$

(d) $2\sinh^2 x = 1 + \sinh 2x$

4. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $e^{2x} = 1 + o(e^x)$ für $x \to -\infty$

(b) $e^{2x} = 1 + o(e^x)$ für $x \to 0$

(c) $e^{2x} = 1 + o(e^x)$ für $x \to 1$

(d) $e^{2x} = 1 + o(e^x)$ für $x \to \infty$

5. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

(a) $2h^3 + h^4 = o(h)$ für $h \to 0$.

(b) $2h^3 + h^4 = o(h^2)$ für $h \to 0$.

(c) $2h^3 + h^4 = o(2h^2)$ für $h \to 0$.

(d) $2h^3 + h^4 = o(h^3)$ für $h \to 0$.

6. Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$$f:\ [2,\infty[\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\sqrt{x-2},$$

an der Stelle $x=6$?

(a) $y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$.

(b) $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.

(c) $y=\frac{1}{2}x-1$.

(d) $y=x-4$.

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

7. Wo ist die Funktion $[-1,1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ differenzierbar?

(a) überall

(b) auf $[-1,1]$

(c) auf $(-1,1)$

(d) auf $(-1,1)\setminus\{0\}$