D-ITET | Analysis I | Januar 2014
Prof. R. Pink

Analysis I - Probeklausur

Allgemeine Hinweise:

- Die Dauer der Prüfung ist zwei Stunden.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben sorgfältig durch. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden. Verweilen Sie daher nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl. Zum Bestehen der Prüfung sind etwa 40% der Punkte nötig, für die Bestnote etwa 80%.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründen Sie die Resultate.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss *alle* Blätter aufsteigend nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 10 A4-Seiten (5 A4-Blätter) selbstverfasst, von Hand oder getippt;
- *keine* sonstige Literatur;
- *keine* elektronischen Hilfsmittel;
- *kein* Mobiltelefon.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

1. **a)** Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$. [*3P*]

b) Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{x\cdot\log^2 x}}{e^{x^2}}$. [*3P*]

c) Für welche Werte $a\in\mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f_a :]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R} :\ x \longmapsto f_a(x) := \frac{\log x}{(x-1)^a}$$

stetig auf $[1,\infty[$ fortsetzbar? Wie muss in diesen Fällen der Wert $f_a(1)$ gewählt werden? [*4P*]

2. **a)** Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$. [*4P*]

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe der reellen Funktion $x \mapsto \frac{1}{x+2013}$ an der Stelle $x_0 = 1$ sowie deren Konvergenzgebiet. [*3P*]

3. Diskutieren Sie die Funktion $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} :\ x \mapsto e^{\sin x}$ im Hinblick auf lokale und globale Extrema, Wendepunkte, Konvexität und Konkavität. [*8P*]

4. **a)** Bestimmen Sie das folgende Integral: $\int \frac{dx}{x^{1/3}+x}$. [*4P*]

b) Bestimmen Sie das folgende Integral: $\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin x \cdot \log(\sin x)\, dx$. [*5P*]

c) Erklären Sie, warum das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$$

konvergiert und bestimmen Sie seinen Wert. [*7P*]

[*Gesamtpunktzahl: 41 Punkte*]