Umordnung von Reihen (Maple worksheet)

Diese Rechnung illustriert, wie man durch Umordnen einer konvergenten, aber nicht absolut konvergenten, Reihe den Grenzwert verändern kann. Grundlage ist die alternierende harmonische Reihe, welche bekanntlich konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Um die Rechnung zu beschleunigen, fassen wir je zwei aufeinanderfolgende Terme zusammen; da dabei keine Umordnung stattfindet, bleibt der Grenzwert derselbe:

```
> seriesterm := '1/(2*k-1) - 1/(2*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{2\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

$$0.6931471806$$

Nun ändern wir die Reihenfolge, indem wir jeweils zwei positive Reihenglieder (ungerader Nenner) und ein negatives Reihenglied (gerader Nenner) aufsummieren. Diese Umordnung "bevorzugt" die positiven Glieder und "benachteiligt" die negativen Glieder. Das negative Reihenglied, das vorher an der 2k-ten Stelle stand, steht nunmehr an der 3k-ten Stelle; diese Glieder werden also immer stärker nach hinten verschoben. Die resultierende Reihe ist immer noch konvergent, hat aber einen grösseren Grenzwert:

```
> seriesterm := '1/(4*k-3) + 1/(4*k-1) - 1/(2*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{4\,k-3} + \frac{1}{4\,k-1} - \frac{1}{2\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

$$1.039720771$$

Nehmen wir jeweils drei, bzw. vier, statt zwei positive Reihenglieder, so wächst der Grenzwert noch stärker:

```
> seriesterm := '1/(6*k-5) + 1/(6*k-3) + 1/(6*k-1) - 1/(2*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{6\,k-5} + \frac{1}{6\,k-3} + \frac{1}{6\,k-1} - \frac{1}{2\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

$$1.242453328$$

```
> seriesterm := '1/(8*k-7) + 1/(8*k-5) + 1/(8*k-3) + 1/(8*k-1) - 1/
  (2*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{8\,k-7} + \frac{1}{8\,k-5} + \frac{1}{8\,k-3} + \frac{1}{8\,k-1} - \frac{1}{2\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

$$1.386294362$$

Wir können auch eine wachsende Anzahl positiver Reihenglieder zwischen je zwei negative Reihenglieder schieben. Zum Beispiel jeweils 1, 2 , 3 , 4, usw. Das liefert die Reihe mit den Gliedern:

```
> seriesterm := 'sum(1/(k^2+k+1-2*i),i=1..k) - 1/(2*k)';
```

$$seriesterm := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k^2+k+1-2\,i} - \frac{1}{2\,k} \tag{1}$$

Man kann beweisen, dass diese Reihe gegen unendlich divergiert. Das Computeralgebrasystem weiss das aber nicht von sich aus, und da die Divergenz so langsam ist, kann es auch so weitgehende

Partialsummen nicht mehr berechnen. Man sieht nur, dass die Partialsummen langsam wachsen:

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..100));
```

$$2.651638016 \tag{2}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000));
```

$$3.800701023 \tag{3}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..10000));
```

$$4.951768775 \tag{4}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..100000));
```

$$6.103038828 \tag{5}$$

Das Umgekehrte passiert, wenn wir nach jedem positiven Reihenglied zwei, drei, bzw. vier negative Reihenglieder aufsummieren. Diese Umordnung "bevorzugt" die negativen Glieder und "benachteiligt" die positiven; die letzteren werden immer stärker nach hinten verschoben. Die resultierenden Reihen sind immer noch konvergent, ihr Grenzwert wird aber immer kleiner:

```
> seriesterm := '1/(2*k-1) - 1/(4*k-2) - 1/(4*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{4\,k-2} - \frac{1}{4\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

$$0.3465735903$$

```
> seriesterm := '1/(2*k-1) - 1/(6*k-4) - 1/(6*k-2) - 1/(6*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{6\,k-4} - \frac{1}{6\,k-2} - \frac{1}{6\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

$$0.1438410331$$

```
> seriesterm := '1/(2*k-1) - 1/(8*k-6) - 1/(8*k-4) - 1/(8*k-2) - 1/
(8*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{8\,k-6} - \frac{1}{8\,k-4} - \frac{1}{8\,k-2} - \frac{1}{8\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

$$0.$$

Der Wert der Reihe ist in diesem Fall nicht nur näherungsweise, sondern exakt gleich Null, wie man durch eine geeignete Umformung beweisen kann.

```
> seriesterm := '1/(2*k-1) - 1/(10*k-8) - 1/(10*k-6) - 1/(10*k-4) -
1/(10*k-2) - 1/(10*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{10\,k-8} - \frac{1}{10\,k-6} - \frac{1}{10\,k-4} - \frac{1}{10\,k-2} - \frac{1}{10\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

$$-0.1115717757$$

Natürlich kann man so weiter machen. Dabei kann man durch geeignete Umordnung jeden beliebigen Grenzwert erreichen, einschliesslich unendlich oder minus unendlich; und man kann auch erreichen, dass die Reihe gar nicht konvergiert.