Greensche Funktionen

Horst Knörrer

Definition 1 *Sei D ein Bereich in $\mathbf{R}^3$ mit Rand ∂D. Eine Funktion $G(x, x_0)$ auf D heisst Greensche Funktion für die Poissongleichung auf D, falls*

$$\Delta G(x, x_0) = \delta(x - x_0) \qquad \textit{und} \qquad G(x, x_0) = 0 \;\; \textit{für} \;\; x \in \partial D$$

Ist f irgendeine Funktion of D, so ist

$$u(x) = \int_D G(x, x')f(x')d\mu(x')$$

die Lösung des Dirichlet Problems

$$\Delta u = f \qquad\qquad u\Big|_{\partial D} = 0$$

Satz 1 *Greensche Funktionen sind symmetrisch, d.h.*

$$G(x, x_0) = G(x_0, x)$$

Beweis (für den Fall von drei Dimensionen):
Seien $x_1, x_2, \in D$. Nach der zweiten Greenschen Formel ist

$$\int_D \Big(G(x, x_1)\, \Delta G(x, x_2) - G(x, x_2)\, \Delta G(x, x_1)\Big) d\mu(x)$$
$$= \int_{\partial D} \Big(G(x, x_1)\, D_{\vec{n}} G(x, x_2) - G(x, x_2)\, D_{\vec{n}} G(x, x_1)\Big) d\omega(x)$$

Dabei bezeichnet $D_{\vec{n}} f(x)$ die Richtungsableitung von einer Funktion f in einem Punkt $x \in \partial D$ in Richtung eines des nach aussen zeigenden Normaleneinheitsvektors.
Da die Greenschen Funktionen am Rand verschwinden und $\Delta G_(x, x_j) = \delta(x - x_j)$, folgt

$$\int_D \Big(G(x, x_1)\, \delta(x - x_2) - G(x, x_2)\, \delta(x - x_1)\Big) d\mu(x) = 0$$

also

$$G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1)$$

Satz 2 *Ist G die Greensche Funktion des Bereichs D, so ist die Lösung des inhomogenen Problems*

$$\Delta u = f \qquad\qquad u\Big|_{\partial D} = h$$

gegeben durch

$$u(x) = \int_D G(x, x')\, f(x') d\mu(x') + \int_{\partial D} D_{\vec{n}} G(x, x')\, h(x')\, d\omega(x')$$

Beweis: Ist u die Lösung des inhomogenen Problems (streng genommen müsste man zeigen, dass es eine Lösung gibt), so ist wieder nach der zweiten Greenschen Formel

$$\begin{aligned}\int_D \Big(u(x)\, \Delta G(x, x_0) - G(x, x_0)\, \Delta u(x)\Big) d\mu(x)& \\ = \int_{\partial D} \Big(u(x)\, D_{\vec{n}} G(x, x_0) - G(x, x_0)\, D_{\vec{n}} u(x)\Big) d\omega(x)&\end{aligned}$$

und somit

$$\int_D \Big(u(x)\, \delta(x - x_0) - G(x, x_0)\, f(x)\Big) d\mu(x) = \int_{\partial D} h(x)\, D_{\vec{n}} G(x, x_0) d\omega(x)$$

oder

$$u(x_0) = \int_D G(x, x_0)\, f(x) d\mu(x) + \int_{\partial D} h(x)\, D_{\vec{n}} G(x, x_0) d\omega(x)$$

Es stellt sich natürlich die Frage, wie man für einen gegebenen Bereich die Greensche Funktion findet. Eine prinzipielle Möglichkeit ist die Entwicklung nach Eigenfunktionen.

Satz 3 *Sei $\Lambda \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}$ und $(\phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von reellwertigen Funktionen auf D so dass*

$$\Delta \phi_\lambda = -\lambda\, \phi_\lambda, \quad \phi_\lambda\Big|_{\partial D} = 0 \qquad \textit{und} \qquad \|\phi_\lambda\|_2 = \sqrt{\int_D |\phi_\lambda(x)|^2 d\mu(x)} = 1$$

und so dass sich jede Funktion $\varphi(x)$ auf D als Reihe

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda\, \phi_\lambda(x)$$

schreiben lässt. Dann ist die Greensche Funktion von D gleich

$$G(x, x_0) = -\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{\lambda}\, \phi_\lambda(x)\, \phi_\lambda(x_0)$$

Beweis: Nach Konstruktion ist

$$\Delta G(x, x_0) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \phi_\lambda(x)\, \phi_\lambda(x_0)$$

Ist

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda\, \phi_\lambda(x)$$

eine Funktion auf D, so ist

$$\begin{aligned}\int_D \varphi(x)\, \Delta G(x, x_0) &= \sum_{\lambda, \lambda' \in \Lambda} c_\lambda \phi_{\lambda'}(x_0) \int_D \phi_\lambda(x)\, \phi_{\lambda'}(x)\, d\mu(x) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda \phi_\lambda(x_0) = \varphi(x_0)\end{aligned}$$

wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten.

Beispiel: Sei D das Rechteck $D = [0, a] \times [0, b]$. Bei der Untersuchung der vibrierenden rechteckigen Membran haben wir gezeigt, dass die Funktionen

$$\phi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\ \sin \frac{m\pi}{a} x\ \sin \frac{n\pi}{b} y, \qquad m, n \in \mathbf{N}$$

ein vollständiges Orthonormalsystem bilden, und dass $\Delta\phi_{mn} = -\lambda_{mn}\phi_{mn}$ mit

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

Als Greensche Funktion ergibt sich

$$G(x, y; x_0, y_0) = -\frac{4}{\pi^2 ab} \sum_{m,n \in \mathbf{N}} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x\ \sin \frac{n\pi}{b} y\ \sin \frac{m\pi}{a} x_0\ \sin \frac{n\pi}{b} y_0}{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Referenz: Richard Haberman: Applied Partial Differential Equations.
Pearson 2005, Chapter 9