Serie 1

1. Beispiele aus der Analysis: seien F, ϕ, g und h stetig differenzierbar. Bestimmen Sie

a) $\frac{\partial}{\partial y} \int\limits_{\phi(x,y)}^{F(x+2y^2)} g(s)ds$

b) $\frac{\partial}{\partial y} \int\limits_{0}^{y^3} \cos(sy)ds$

c) $\frac{\partial}{\partial y} \int\limits_{0}^{y} h(s,y)ds$

2. Man bestimme die Ordnung der folgenden partiellen Differentialgleichungen, wobei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist. Welche sind linear? Welche sind homogen?

a) $x^3 u_{xx} + 2u_{xy} + y^3 u_{yy} + u_x - y^2 - e^x = 0$

b) $16u_{yyyy} + yu_x + x^2 u_y + u_x u_y - \tan(x^2 + y^2) = 0$

c) $u_{xy} - (u_x)^2 - \sin x + y = 0$

d) $xy^2 u_{yy} - e^x y u_y - u_x = 0$

e) $u_{xxy} - yu_y - e^x = 0$

f) $u_{xx} u_y - yu_y - e^x = 0$

3. Man löse das folgende Problem mithilfe der Formel von D'Alembert:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= \frac{1}{1+x^2}, & \\ u_t(x,0) &= \sin x & \end{aligned}$$

4. Nach der Methode von D'Alembert ist

$$F(x-t) + G(x+t)$$

Bitte wenden!

die allgemeine Form der Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$, wobei F, G zwei beliebige (zweimal stetig differenzierbare) Funktionen sind. Man betrachte das folgende Problem (schwingende Saite):

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \qquad\qquad x \in [0, \pi], t \geq 0, \\ u(0,t) = u(\pi, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= \sin x, \\ u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Man löse es mit der Methode von D'Alembert.

5. a) Finden Sie eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= Q(x,t), \qquad x \in (-\infty, \infty),\ t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \\ u_t(x, 0) &= 0, \end{aligned}$$

für eine Funktion $Q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.

b) Welche Raum-Zeit Punkte (x, t) der Störung $Q(x, t)$ beeinflussen die Lösung u an der Stelle (x_0, t_0)?