Serie 2

1. Nach der Methode von D'Alembert ist

$$F(x-t)+G(x+t)$$

die allgemeine Form der Lösung der Wellengleichung $u_{tt}-u_{xx}=0$, wobei F,G zwei beliebige (zweimal stetig differenzierbare) Funktionen sind. Man betrachte das folgende Problem (schwingende Saite):

$$\begin{aligned} u_{tt}-u_{xx} &= 0, \qquad\qquad x\in(0,\pi), t>0,\\ u(0,t)=u(\pi,t) &= 0,\\ u(x,0) &= \sin x,\\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Man löse es mit der Methode der Separation der Variablen. Vergleichen Sie Ihre Lösung mit der Lösung der Aufgabe 4, Serie 1. Führen die zwei Methoden zur gleichen Lösung?

2. Man löse das folgende Problem für $u:[0,\pi]\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u_t-u_{xx} &= 0,\\ u(0,t) &= 1,\\ u(\pi,t) &= 2,\\ u(x,0) &= \sin x-3\sin(2x)+2\sin(3x)+\frac{1}{\pi}x+1. \end{aligned}$$

3. Man löse das folgende inhomogene Problem für $u:\mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u_{tt}-u_{xx} &= x^2,\\ u(x,0) &= \sin(x),\\ u_t(x,0) &= \cos(x). \end{aligned}$$

Bitte wenden!

4. Man löse das folgende Problem für $u : [0, L] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \\ u(0,t) &= 0, \\ u(L,t) &= 0, \\ u(x,0) &= f(x), \end{aligned}$$

wobei

$$f(x) := \begin{cases} \frac{2}{L}x, & x \in [0, L/2], \\ \\ \frac{2}{L}(L-x), & x \in [L/2, L]. \end{cases}$$

5. (**Membranschwingungen**) In dieser Aufgabe berechnen wir die Schwingungen einer quadratischen Trommel. Sei Q das Gebiet

$$Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, y < 1\}.$$

Bestimmen Sie die Lösung $u(x,y,t)$ des folgenden Anfangs-Randwertproblems mit Variablenseparation:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) &= 0, && \text{für } (x,y) \in Q, \\ u(x,y,t) &= 0, && \text{für } (x,y) \in \partial Q, \\ u(x,y,0) &= 0, && \text{für } (x,y) \in Q, \\ u_t(x,y,0) &= \delta(x - \tfrac{1}{2})\, \delta(y - \tfrac{1}{2}), && \text{für } (x,y) \in Q. \end{aligned}$$

Hinweis: $\delta(x - \frac{1}{2})$ kann für $x \in [0, 1]$ wie folgt durch eine 2-periodische ungerade Fourierreihe dargestellt werden:

$$\delta(x - \frac{1}{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^k \sin((2k+1)\pi x).$$