Serie 3

1. Man betrachte das folgende Problem für $u : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u &= 0, \\ u(0,t) &= 3\sin(2t). \end{aligned}$$

Man zeige, dass die Methode der Separation der Variablen nicht zu einer Lösung führt. Bedeutet das, dass keine Lösung für das Problem existiert?

2. Die Spannungsverteilung $u(x,t)$ in einem elektrischen Draht der Länge L ist gegeben durch

$$u_t = Du_{xx}, \quad x \in (0,L)\,,\ t > 0.$$

Die Spannung am Ende $\{x = L\}$ ist konstant null. Am anderen Ende $\{x = 0\}$ hingegen variert die Spannung gemäss

$$u(0,t) = Ct, \quad t \geq 0,$$

für eine Konstante C. Finde $u(x,t)$ unter der Bedingung, dass die anfängliche Verteilung $u(x,0) = 0$ ist.

3. Wir betrachten eine Platte $R = (0,\pi) \times (0,\pi)$, welche am Rand folgende fixe Temperaturverteilung besitzt

$$\begin{aligned} u(x,0) = u(x,\pi) &= 0, & x \in [0,\pi]\,, \\ u(0,y) &= 0, & y \in [0,\pi]\,, \\ u(\pi,y) &= \sin(y), & y \in [0,\pi]\,. \end{aligned}$$

Berechne die stationäre Temperaturverteilung $u(x,t)$, welche nach genügend langer Zeit eintritt.

4. Finde die Lösung zu

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in (0,L),\ y \in (-\infty,\infty),$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0,y) &= f(y), \\ u(L,y) &= g(y). \end{aligned}$$

Bitte wenden!

5. Finde die Lösung zu

$$-\Delta u + u = f,$$

für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.