D-ITET
Prof. Dr. H. Knörrer

Analysis III

WS 13

Serie 4

1. Finde die Lösung der 2-dimensionalen Wellengleichung,

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) &= 0, \qquad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ u(x_1,x_2,0) &= f(x_1,x_2), \\ u_t(x_1,x_2,0) &= g(x_1,x_2), \end{aligned}$$

mithilfe der Formel von Kirchhoff.

Hinweis: Betrachte die Funktion $v(x_1,x_2,0,t)$, wobei v eine Lösung der 3-dimensionalen Wellengleichung ist.

2. Finde die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \qquad x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) &= 1, \\ u(x,0) &= 0, \end{aligned}$$

mithilfe der Laplacetransformation.

Hinweise:

- Sei $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ die Laplacetransformation von f. Definiere $\tilde{F}(s) := F(\lambda s)$ für ein $\lambda > 0$. Was ist $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{F})$?
- Die Rücktransformation von $G(s) := e^{-\sqrt{s}}/s$ ist gegeben durch

$$\mathcal{L}^{-1}(G)(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2}\,du.$$

3. Sei $R > 0$. Ohne irgendein Integral zu berechnen, zeige, dass

$$\int_0^{2\pi} P_R(r, t-\phi)\,dt = 2\pi \quad \text{für alle} \quad (r,\phi) \in [0,R] \times [0,2\pi),$$

wobei P_R der Poisson-Kern ist:

$$P_R(r,\vartheta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\vartheta + r^2}.$$

Bitte wenden!

4. Betrachte den Sektor

$$S := \Big\{ (r\cos\phi\,, r\sin\phi) \;\Big|\; r_0 \le r \le r_1 \;\text{ und }\; 0 \le \phi \le \alpha \Big\} \subset \mathbb{R}^2,$$

für die Konstanten $0 < r_0 < r_1 < \infty$ und $0 < \alpha < 2\pi$. Finde eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(r,\phi) &= 0, \\ u(r,0) &= 0, \\ u(r,\alpha) &= 0, \\ u(r_0,\phi) &= f(\phi), \\ u(r_1,\phi) &= g(\phi). \end{aligned}$$

5. **a)** Zeige, dass für die Funktion

$$g(\sigma) := \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\sigma - \varphi) + r^2}, \qquad 0 \le r \le R,$$

die Abschätzung

$$\frac{R-r}{R+r} \le g(\sigma) \le \frac{R+r}{R-r}$$

gilt.

b) Benutze die Poissonformel, um mit obiger Abschätzung die Harnackungleichung herzuleiten: für jede nichtnegative harmonische Funktion in der Kreisscheibe vom Radius R gilt:

$$\frac{R-r}{R+r} u(0,0) \le u(x,y) \le \frac{R+r}{R-r} u(0,0),$$

für $x^2 + y^2 = r^2$.

c) Sei $u(x,y)$ eine harmonische Funktion in $D = \{(x,y) : \; x^2 + y^2 < 36\}$, welche folgender Randbedingung genügt

$$u(x,y) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne $u(0,y)$.