D-ITET | Analysis III | WS 13/14
Prof. Dr. H. Knörrer

Serie 5

1. Sei $R > 0$ und $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \sqrt{x^2 + y^2} < R\}$. Sei $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ eine in D harmonische Funktion mit $u(x, y) = 2x^2 - y^2 + 1$ auf ∂D. Bestimme das Maximum von u in $\overline{D}$ und den Wert $u(0, 0)$.

2. Sei L der Differentialoperator

$$Lu = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu,$$

und M der adjungierte Operator

$$Mv = (Av)_{xx} + (Bv)_{xy} + (Cv)_{yy} - (Dv)_x - (Ev)_y + Fv,$$

für Funktionen $A, B, \ldots, F$. Zeige, dass

$$\int_R (vLu - uMv)dxdy = \int_{\partial R} (Un_x + Vn_y)dS,$$

für $R \subset \mathbb{R}^2$, wobei $\vec{n} = (n_x, n_y)$ der Normalenvektor des Randes ∂R ist und

$$\begin{aligned} U &= Avu_x - u(Av)_x - u(Bv)_y + Duv, \\ V &= Bvu_x + Cvu_y - u(Cv)_y + Euv. \end{aligned}$$

3. Finde die Greensche Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$ des Laplace-Operators mithilfe der Spiegelungsmethode auf den Gebieten

a) $D = \{(x, y) : \; y > 0\}$,

b) $D = \{(x, y) : \; x > 0 \text{ und } y > 0\}$,

4. Sei $Q := [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= -34 \sin(3\pi x) \sin(5\pi y), & (x, y) &\in Q \setminus \partial Q, \\ u(x, y) &= 0, & (x, y) &\in \partial Q. \end{aligned}$$

a) Finde die Greensche Funktion für dieses Problem in der Form

$$G(x, y; \xi, \eta) = \sum_{m,n \geq 1} a_{m,n}(\xi, \eta) \sin(n\pi x) \sin(m\pi y).$$

Bitte wenden!

b) Finde die Lösung $u(x, y)$ mithilfe der Greenschen Funktion.

5. **a)** Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)f'(x)\right] + n(n+1)f(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Zeige, dass

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

eine Lösung der Differentialgleichung ist.

b) Beweise die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m. \end{cases}$$

c) Finde die Reihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x).$$

für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ -1, & x \in [-1, 0), \end{cases}$$

d) Die Funktionen

$$P_n^m(x) = (x^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$

für $n \geq m$ sind Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)g'(x)\right] + \left(n(n-1) - \frac{m}{1-x^2}\right)g(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Die Funktionen

$$\cos(m\phi)P_n^m(\cos(\theta)), \qquad \sin(m\phi)P_n^m(\cos(\theta))$$

für sphärische Koordinaten $(\phi, \theta) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi)$ bilden eine Basis des Vektorraumes der Funktionen $f : S^2 \to \mathbb{R}$. Zeige, dass die Basis orthogonal ist.

e) Finde eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(r, \phi, \theta) &= 0, \\ u(R, \phi, \theta) &= \begin{cases} V, & \theta \in [0, \pi/2), \\ -V, & \theta \in [\pi/2, \pi), \end{cases} \end{aligned}$$

für $(r, \phi, \theta) \in B_R(0)$ und eine Konstante $V > 0$.