D-ITET | Analysis III | WS 13/14

Prof. Dr. H. Knörrer

Serie 6

1. Sei u die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g.$$

Sei $(\xi, \eta) = (\xi(x,y), \eta(x,y))$ eine Transformation.

a) Zeige, dass

$$w(\xi,\eta) = u\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)$$

einer PDG der Form

$$Aw_{\xi\xi} + 2Bw_{\xi\eta} + Cw_{\eta\eta} + Dw_\xi + Ew_\eta + Fw = G$$

genügt und berechne A, B, C.

b) Verifiziere, dass das Vorzeichen der Determinante $\Delta = ac - b^2$ der partiellen Differentialgleichung nicht durch eine reguläre Transformation verändert wird.

2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Betrachte die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\alpha^2 t u_x - x u_t = 4\alpha^2 xt, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

zusammen mit der Anfangskurve

$$u(x,0) = x^2.$$

a) Verwende die Methode der Charakteristiken um dieses Problem zu lösen. Zeichne die Lösung in $\mathbb{R}^3$.

b) Zeichne die Charakteristiken in der (x,t)-Ebene.

3. Betrachte die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$e^x u_x + u_t = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

zusammen mit der Anfangskurve

$$u\left(x, px - e^{-x}\right) = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Hier ist $p \in \mathbb{R}$ eine Konstante, $g(x)$ ist eine gegebene Funktion.

Bitte wenden!

a) Verwende die Methode der Charakteristiken um eine Lösung zu finden.

b) Beschreibe die Anfangskurve und die Charakteristiken in der (x, t)- Ebene.

4. Wir betrachten die unviskose Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty),$$

mit Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x \leq -1, \\ -x, & -1 < x < 1, \\ -1, & x \geq 1. \end{cases}$$

a) Verwende die Methode der Charakteristiken um dieses Problem zu lösen.

b) Zeichne die Charakteristiken in der (x, t)-Ebene.

c) Beschreibe in Worten die Entwicklung der Lösung.

d) Zeichne die Lösung $u(x, t)$ zu den Zeiten 0, 0.25, 0.5, 0.75 und 1.

5. Sei $F(u) = e^u$. Untersuche den Erhaltungssatz

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = u_0(x)$.

a) Bestimme die Charakteristiken mit Anfangspunkten $x = s$, $t = 0$.

b) Sei

$$u_0(s) = \begin{cases} 1, & s < 0, \\ 0, & s \geq 0. \end{cases}$$

Zeichne in der (x, t)-Ebene die Charakteristiken und den Verlauf der Stosswelle.
Zeichne den Graphen von $u(x, 1)$.

c) Sei

$$u_0(s) = \begin{cases} 1, & s > 0, \\ 0, & s \leq 0. \end{cases}$$

Zeichne in der (x, t)-Ebene die Charakteristiken.