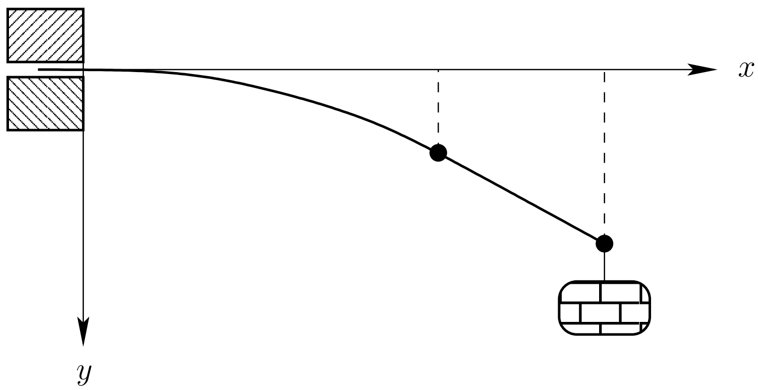
D-ITET | Analysis III | WS 13/14
Prof. Dr. H. Knörrer

Serie 7

1. Biegelinie eines elastischen Stabes. Ein homogener elastischer Stab der Länge L sei am linken Ende $x = 0$ eingespannt und am rechten Ende $(x = L)$ so beschwert, dass die Durchbiegung $u = u_L$ resultiert.



Gesucht ist die Biegelinie $u(x)$ auf dem Intervall $[\,0, L\,]$ unter Vernachlässigung des Eigengewichts des Stabes und unter der für kleine Deformationen gültigen Annahme, dass die Deformationsenergie, welche durch das Funktional

$$E[u] := \frac{1}{2}\int_0^L (u''(x))^2\,dx$$

gegeben ist, minimal wird.

a) Geben Sie alle Randbedingungen an, die sich direkt aus der Problemstellung ablesen lassen.

b) Berechnen Sie eine Differentialgleichung für u zusammen mit den fehlenden natürlichen Randbedingungen und geben Sie eine explizite Lösung des Problems an.

2. Lösen Sie das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} tu_x + u_t &= 2, \\ u(x,0) &= h(x), \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

mit der Methode der Charakteristiken. In welchem Gebiet ist die Lösung durch die Anfangswerte bestimmt?

Bitte wenden!

3. Untersuchen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} xu_x + (x+2y-2)u_y &= x+y, \qquad x>0,\ y\in\mathbb{R}, \\ u(1,y) &= y, \end{aligned}$$

mit der Methode der Charakteristiken.

a) Lösen Sie die charakteristischen Gleichungen mit den entsprechenden Anfangsbedingungen.

b) Bestimmen Sie die Charakteristik durch den Punkt $(1,s)$. Stellen Sie diese Charakteristik mit Hilfe einer Funktion $y=f(x)$ dar. Skizzieren Sie die Menge der Charakteristiken.

c) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,y)$ des Anfangswertproblems.

4. Finde die Normalform der folgenden partiellen Differentialgleichung

$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0.$$

Finde die Lösung der transformierten Gleichung.

5. Burgers Gleichung. Untersuche Burgers Gleichung

$$u_t + uu_x = 0$$

mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimme die Lösung für $0\le y\le 2$. Zeichne die Charakteristiken in der (x,y)-Ebene und zeichne die Graphen von $u(x,1)$ und $u(x,2)$.

b) Für $y>2$ gibt es eine Schockwelle am Ort $x=\gamma(y)$. Bestimme $u^-(y) := \lim_{x\uparrow\gamma(y)} u(x,y)$, $u^+(y) = \lim_{x\downarrow\gamma(y)} u(x,y)$ und daraus die Stossgeschwindigkeit $\gamma'(y)$.

c) Die Gleichung für $\gamma'(y)$ ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für die unbekannte Funktion $\gamma(y)$. Löse diese durch Separation der Variablen. Welche Anfangsbedingung muss gewählt werden?

d) Wie lautet die Lösung $u(x,y)$ für $y>2$?

Siehe nächstes Blatt!

6. Das Duhamelsche Prinzip. Für $s \geq 0$ sei $v(x,t,s)$ die Lösung des folgenden Anfangswertproblems (dabei ist s als Parameter zu betrachten):

$$\begin{array}{rcll} v_t - v_{xx} & = & 0, & 0 < x < L, t > s, \\ v(0,t,s) & = & v(L,t,s) = 0, & t > s, \\ v(x,s,s) & = & F(x,s), & 0 \leq x \leq L. \end{array}$$

Die Funktion u sei definiert als

$$u(x,t) := \int_0^t v(x,t,s) ds.$$

Zeige, dass u eine Lösung des folgenden inhomogenen Problems ist:

$$\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & F(x,t), & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) & = & u(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) & = & 0, & 0 \leq x \leq L. \end{array}$$

7. Finde mithilfe der Fouriertransformation eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} - tu & = & 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) & = & f(x), & \end{array}$$

wobei $u(x,t)$ beschränkt sein soll.

8. Helmholtz-Gleichung. Sei $a, b > 0$. Finde die Lösung u von

$$\begin{array}{rcll} \left(\Delta + \frac{\pi^2}{a^2}\right) u & = & 0, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b), \\ u(0,y) = u(a,y) & = & 0, & y \in [0,b], \\ u(x,0) & = & 0, & x \in [0,a], \\ u(x,b) & = & 3 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right), & x \in [0,a]. \end{array}$$

9. Telegraphengleichung. Finde eine Lösung der folgenden PDG

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} + a u_t + bu - c^2 u_{xx} & = & 0, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) & = & f(x), & \\ u_t(x,0) & = & 0, & \\ u(0,t) & = & u(l,t) = 0. & \end{array}$$

10. Finde eine Lösung der inhomogenen partiellen Differentialgleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = e^x, \qquad u(x,0) = 5, \qquad u_t(x,0) = x^2.$$