Membranen

Sei Ω ein Gebiet in der Ebene mit Rand $\delta\Omega$. Wir betrachten die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\,u_{tt} = \Delta u \ , \qquad\qquad (x,y) \in \Omega$$

mit der Dirichlet – Randbedingung

$$u(x,y,t) = 0 \ , \qquad\qquad (x,y) \in \delta\Omega$$

Dabei ist $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ der Laplaceoperator. Lösungen beschreiben die Schwingungen einer Membran, die in $\delta\Omega$ eingespannt ist. Wir betrachten zwei Fälle, nämlich dass Ω ein Rechteck, und dass Ω ein Kreis ist.

1. Rechteckige Membranen

Wir nehmen an, dass

$$\Omega = R = [0,a] \times [0,b]$$

und machen den Ansatz der Separation der Variablen

$$u(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t)$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt

$$\frac{1}{c^2} X(x)\,Y(y)\,T''(t) = X''(x)\,Y(y)\,T(t) + X(x)\,Y''(y)\,T(t)$$

oder

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

Die linke Seite hängt nicht von x und y ab, der erste Term auf der rechten Seite nicht von y und t, und der zweite Term nicht von x und t. Falls also der Ansatz der Separation der Variablen zum Erfolg führt, gibt es reelle Zahlen α, β, γ mit $\frac{1}{c^2}\alpha = \beta + \gamma$ so dass

$$T'' = \alpha T \qquad X'' = \beta X \qquad Y'' = \gamma Y$$

Wie im eindimensionalen Fall der schwingenden Saite erzwingen die Randbedingungen, dass β und γ negativ sind. Schreiben wir $\beta = -k^2$, $\gamma = -p^2$, so ergibt sich

$$X(x) = C_1\,\sin kx + C_2 \cos kx \qquad\qquad Y(y) = D_1\,\sin p\,x + D_2 \cos px$$

Die Randbedingungen implizieren weiterhin, dass $C_2 = D_2 = 0$, und dass $\sin ka = 0 = \sin pb = 0$; Also sind $\frac{ka}{\pi}$ und $\frac{pb}{\pi}$ Vielfache von ganzen Zahlen. Folglich sind X und Y Vielfache einer der Funktionen

$$X_m(x) = \sin \frac{m\pi}{a} x \qquad , \qquad Y_n(y) = \sin \frac{n\pi}{b} y \qquad , \qquad m, n = 1, 2, 3, \cdots$$

Dies entspricht den Wahlen $k = \frac{m\pi}{a}$, $p = \frac{n\pi}{b}$. Es ergibt sich $\alpha = -\lambda_{mn}^2$ mit

$$\lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Wir erhalten somit mit dem Ansatz der Separation der Variablen die Lösungen

$$u_{mn}(x, y, t) = \Big(A_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn} \ \sin \lambda_{mn} t\Big) \sin \frac{m\pi}{a} x \ \sin \frac{n\pi}{b} y$$

Natürlich ist auch jede Linearkombination

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \Big(A_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn} \ \sin \lambda_{mn} t\Big) \sin \frac{m\pi}{a} x \ \sin \frac{n\pi}{b} y$$

eine Lösung. Die Anfangswerte einer solchen Lösung sind

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \tfrac{m\pi}{a} x \ \sin \tfrac{n\pi}{b} y \\ u_t(x, y, 0) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \lambda_{mn} B_{mn} \sin \tfrac{m\pi}{a} x \ \sin \tfrac{n\pi}{b} y \end{aligned}$$

Diese Reihen sind zweidimensionale Fourierreihen. Wie im Fall einer Dimension kann man zeigen, dass jede (genügend reguläre) Funktion $f(x, y)$ auf R, die auf dem Rand δR verschwindet, sich in eine Reihe der Form

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \ \sin \frac{n\pi}{b} y$$

enwickeln lässt. Dabei sind die Fourierkoeffizienten

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_R f(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \ \sin \frac{n\pi}{b} y \ dxdy$$

Somit lässt sich das Anfangswertproblem mit den obigen Reihen komplett lösen.

2. Kreisförmige Membranen

Hier nehmen wir an, dass

$$\Omega = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 = R^2\}$$

die Kreisscheibe mit Radius R ist. Wir führen Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

ein und verwenden, dass der Laplaceoperator in Polarkoordinaten gleich

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

ist. Wir machen den Ansatz der Separation der Variablen

$$u(r, \varphi, t) = F(r)\, G(\varphi)\, T(t)$$

Wegen der Randbedingung fordern wir, dass $F(R) = 0$; und natürlich soll $G(\varphi)$ periodisch mit Periode 2π sein. Einsetzen in die Differenzialgleichung ergibt

$$\frac{1}{c^2} F(r)\, G(\varphi)\, T''(t) = F''(r)\, G(\varphi)\, T(t) + \frac{1}{r} F'(r)\, G(\varphi)\, T(t) + \frac{1}{r^2} F(r)\, G''(\varphi)\, T(t)$$

oder

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{F''(r)}{F(r)} + \frac{1}{r}\frac{F'(r)}{F(r)} \; + \frac{1}{r^2}\frac{G''(\varphi)}{G(\varphi)}$$

Da die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur von r und φ abhängt, muss es – falls der Ansatz der Separation der Variablen zum Erfolg führt – eine reelle Zahl h geben so dass

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = h = \frac{F''(r)}{F(r)} + \frac{1}{r}\frac{F'(r)}{F(r)} \; + \frac{1}{r^2}\frac{G''(\varphi)}{G(\varphi)}$$

Aus physikalischen Gründen suchen wir nach Lösungen, die weder exponentiell in der Zeit wachsen noch exponentiell abklingen. Das impliziert, dass h negativ ist (das kann man auch mathematisch exakt begründen, indem man den Fall $h \geq 0$ durchspielt). Schreibe $k = -k^2$. Es ergeben sich die beiden Gleichungen

$$T''(t) + c^2 k^2\, T(t) = 0$$
$$r^2 \tfrac{F''(r)}{F(r)} + r \tfrac{F'(r)}{F(r)} + k^2 r^2 = -\tfrac{G''(\varphi)}{G(\varphi)}$$

In der zweiten Gleichung ist die linke Seite von φ unabhängig, und die rechte von r. Folglich muss es eine reelle Zahl ν geben, so dass

$$r^2 \frac{F''(r)}{F(r)} + r \frac{F'(r)}{F(r)} + k^2 r^2 = \nu = -\frac{G''(\varphi)}{G(\varphi)}$$

d.h., dass

$$r^2F''(r) + rF'(r) + (k^2r^2 - \nu)F(r) = 0 \qquad \text{und} \quad G''(\varphi) = \nu\, G(\varphi)$$

Entwickelt man G in eine Fourierreihe, so sieht man, dass ν von der Form n^2 mit einer ganzen Zahl $n \geq 0$ sein muss, und

$$G(\varphi) = C_n \cos\varphi + D_n \sin\varphi$$

Die Gleichung für F hat dann die Gestalt

$$r^2F''(r) + rF'(r) + (k^2r^2 - n^2)F(r) = 0 \qquad (*)$$

In Übung 3 der Serie 2 zur Vorlesung Analysis II wurde gezeigt, dass die sogenannten Besselfunktionen

$$J_\nu(x) = r^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu}\, m!\, \Gamma(\nu+m+1)}$$

Lösungen der "Besselschen Differenzialgleichung"

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

sind. Die Funktionen $F(r) = J_n(kr)$ lösen also die Differenzialgleichung $(*)$. Die Randbedingung $F(R) = 0$ impliziert, dass kR eine Nullstelle der Besselfunktion J_n sein muss. Man kann zeigen, dass die Besselfunktionen J_n, $n \geq 0$, alle unendlich viele Nullstellen

$$\alpha_{1n} < \alpha_{2n} < \cdots$$

haben, und dass $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_{mn} = \infty$. Somit ergibt sich, dass $k = \frac{\alpha_{mn}}{R}$ für ein $m \geq 1$, und dass

$$F(r) = J_n(k_{mn}r) \qquad \text{mit} \quad k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}$$

Die Differenzialgleichung $T''(t) + c^2\frac{\alpha_{mn}^2}{R^2}$ lässt sich leicht lösen. Fasst man die Ergebnisse zusammen, so erhält man aus dem Ansatz der Separation der Variablen die Lösungen

$$\begin{aligned} u_{mn} &= \Big(A_{mn}\cos(c\,k_{mn}t) + B_{mn}\sin(c\,k_{mn}t)\Big)\, J_n(k_{mn}r)\, \cos n\varphi \\ u^*_{mn} &= \Big(A^*_{mn}\cos(c\,k_{mn}t) + B^*_{mn}\sin(c\,k_{mn}t)\Big)\, J_n(k_{mn}r)\, \sin n\varphi \end{aligned}$$

Natürlich sind auch konvergente Reihen in diesen Ausdrücken wieder Lösungen. Die Theorie der "Fourier–Bessel–Reihen" zeigt, dass für genügend reguläre Anfangsdaten die Lösung in Form einer solchen Reihe geschrieben werden kann.

Im Fall von Rotationssymmetrie hat man nur die Terme mit $n = 0$.