Musterlösung Serie 1

1.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\phi(x,y)}^{F(x+2y^2)} g(s)ds &= g(F(x+2y^2))F'(x+2y^2)4y - g(\phi(x,y))\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)\\
\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{0}^{y^3} \cos(sy)ds &= \frac{1}{y^2}(\cos(y^4)4y^4 - \sin(y^4))\\
\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{0}^{y} h(s,y)ds &= h(y,y) + \int\limits_{0}^{y}\frac{\partial h}{\partial y}(s,y)ds
\end{aligned}
$$

2.
a) 2. Ordnung; linear und nicht homogen.
b) 4. Ordnung; nicht linear.
c) 2. Ordnung; nicht linear.
d) 2. Ordnung; linear und homogen.
e) 3. Ordnung; linear und nicht homogen.
f) 2. Ordnung; nicht linear.

3. Mit der Formel von D'Alembert für die eindimensionale Wellengleichung (mit $c = 1$) ist die Lösung

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(x-t)^2} + \frac{1}{1+(x+t)^2}\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin y\; dy\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(x-t)^2} + \frac{1}{1+(x+t)^2}\right) + \frac{1}{2}(\cos(x-t) - \cos(x+t)).
\end{aligned}
$$

4. Nach der Methode von D'Alembert ist

$$u(x,t) = F(x-t) + G(x+t)$$

Bitte wenden!

die allgemeine Form der Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$, wobei F, G zwei beliebige (zweimal stetig differenzierbare) Funktionen sind. In unserem Fall erhalten wir aus den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = \sin x$ und $u_t(x, 0) = 0$

$$F(x) + G(x) = \sin x, \quad -F'(x) + G'(x) = 0.$$

Wegen der zweiten Gleichung muss $F(x) - G(x)$ eine Konstante sein. Somit gilt

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin x + C, \quad G(x) = \frac{1}{2}\sin x - C$$

und

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\sin(x - t) + \frac{1}{2}\sin(x + t).$$

5. a) Wir machen zuerst eine Variablentransformation wie in der Lösung der homogenen Wellengleichung. Wir setzen

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct,$$

und $v(\xi(x, t), \eta(x, t)) = u(x, t)$. Die partiellen Ableitungen sind dann

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x, \; \ldots$$

und somit ist

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 v_{\xi\eta}.$$

Die neue partielle Differentialgleichung ist

$$-4c^2 v_{\xi\eta}(\xi, \eta) \quad = \quad F(\xi, \eta) := Q(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)), \qquad \xi > \eta.$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$v(\xi, \eta) = -\frac{1}{4c^2} \int^{\xi} \int^{\eta} F(\xi', \eta') d\eta' d\xi' + C_1(\xi) + C_2(\eta)$$

für $\xi > \eta$. Um die Randbedingungen einzusetzen machen wir folgende Überlegungen. Nehmen wir zuerst an, dass $C_1 \equiv C_2 \equiv 0$. Dann haben wir

$$v(\xi, \eta) = -\frac{1}{4c^2} \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{\eta_0}^{\eta} F(\xi', \eta') d\eta' d\xi'$$

bis auf eine Konstante, solange das Integrationsgebiet $D := [\xi_0, \xi] \times [\eta_0, \eta]$ im Definitionsbereich ($\xi > \eta$) liegt. Wir definieren $\Delta(\xi, \eta) := \{(\xi', \eta') \in \mathbb{R}^2 \mid \eta <$

Siehe nächstes Blatt!

$\xi' < \xi$, $\eta < \eta' < \xi$, $\eta' < \xi'\}$ und $\overline{\Delta}(\xi,\eta)$ ist dieselbe Menge mit der umgekehrten Orientierung. Es gilt dann

$$\begin{aligned} v(\xi,\eta) &= -\frac{1}{4c^2}\int\limits_{\overline{\Delta}(\xi,\eta)} F(\xi',\eta')d\eta' d\xi' \\ &= -\frac{1}{4c^2}\int\limits_{\eta}^{\xi}\int\limits_{\xi'}^{\eta} F(\xi',\eta')d\eta' d\xi' \\ &= \frac{1}{4c^2}\int\limits_{\eta}^{\xi}\int\limits_{\eta}^{\xi'} F(\xi',\eta')d\eta' d\xi' \end{aligned}$$

bis auf eine Konstante. Wir möchten das Integral in der (x,t)-Ebene betrachten und verwenden dafür den Transformationssatz. Allgemein gilt für einen Diffeomorphismus $\phi : U \to V$ zwischen zwei offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\int\limits_{\phi(U)} f(v)dv = \int\limits_{U} f(\phi(u))|\det(D\phi(u))|du.$$

Für die Koordinatentransformation $\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0} \to \{(\xi,\eta)\,|\,\xi > \eta\}$ mit $\phi(x,t) = (x+ct, x-ct)$ gilt dann

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Delta(\xi,\eta)} F(\xi',\eta')d\eta' d\xi' &= \int\limits_{\phi^{-1}(\Delta(\xi,\eta))} F(x'+ct', x'-ct')2c\,dx'dt' \\ &= \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} Q(x',t')2c\,dx'dt' \end{aligned}$$

Wir erhalten die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(\xi(x,t),\eta(x,t)) \\ &= \frac{1}{2c}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} Q(x',t')\,dx'dt' + C_1(x+ct) + C_2(x-ct) \end{aligned}$$

und nach Einsetzen der Anfangsbedingungen folgt

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} Q(x',t')dx'dt'.$$

b) Es sind genau die Punkte im Integrationsgebiet, also die Punkte der Menge

$$\{(x,t)\mid t\in[0,t_0], x\in[x_0-c(t_0-t), x_0+c(t_0-t)]\}.$$