Musterlösung Serie 2

1. Wir wenden die Methode der Separation der Variablen an. Wir schreiben $u(x,t) = X(x)T(t)$ und erhalten

$$T''(t)X(x) - T(t)X''(x) = 0.$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) - \lambda T(t) = 0,$$

für eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir machen eine Fallunterscheidung ($\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$) und erhalten als allgemeine Lösung für $\lambda := -\omega^2 < 0$

$$X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$

Mit den Randbedingungen $X(0) = X(\pi) = 0$ erhalten wir $A = 0$ und $\omega = n \in \mathbb{Z}$. Die Lösung der zweiten Gleichung ist dann

$$T_n(t) = C_n\cos(nt) + D_n\sin(nt).$$

Nach dem Superpositionsprinzip ist die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n\cos(nt) + D_n\sin(nt))\sin(nx).$$

Aus den Anfangsbedingungen $u(x,0) = \sin x$ und $u_t(x,0) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin(nx), \\ 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n n\sin(nx). \end{aligned}$$

Deshalb ist $C_1 = 1$ und die anderen Koeffizienten sind null. Die Lösung ist

$$u(x,t) = \cos(t)\sin(x).$$

Nach der Methode von D'Alembert ist die Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sin(x-t) + \frac{1}{2}\sin(x+t).$$

Bitte wenden!

Die zwei Methoden führen also zu der gleichen Lösung. Dies kann durch die Formel

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

bewiesen werden, in der Tat

$$\sin(x-t) + \sin(x+t) = 2\sin(x)\cos(t).$$

2. Wir haben hier die Wärmeleitungsgleichung auf dem Intervall $[0,\pi]$ mit festen Werten für die Temperatur an den Endpunkten.

Im ersten Schritt betrachten wir die PDG mit den Randbedingungen und ignorieren die Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \\ u(0,t) &= 1, \\ u(\pi,t) &= 2. \end{aligned}$$

Für die Methode der Separation der Variablen benötigen wir homogene Randbedingungen. Wir suchen nun eine von t unabhängige Lösung u_P, die $u_P''(x) = 0$, $u_P(0) = 1$ und $u_P(\pi) = 2$ erfüllt. Sie muss also eine lineare Funktion sein, die durch die Punkte $(0,1)$ und $(\pi,2)$ geht. Also ist $u_P(x) = 1 + \frac{1}{\pi}x$. Die Lösung des Problems ist also durch

$$u(x,t) = 1 + \frac{1}{\pi}x + v(x,t)$$

gegeben, wobei v die allgemeine Lösung des folgenden homogenen Problems ist:

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= 0, \\ v(0,t) &= 0, \\ v(\pi,t) &= 0, \\ v(x,0) &= \sin x - 3\sin(2x) + 2\sin(3x). \end{aligned}$$

Dies kann mit der Methode der Separation der Variablen gelöst werden.

Wir suchen Lösungen der Form $v(x,t) = X(x)T(t)$ und setzen diese Funktion in die PDG ein. Man erhält

$$X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0.$$

Jetzt wird alles was von x abhängt nach rechts geschoben und alles was von t abhängt nach links:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Da die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur von x abhängt und Gleichheit für alle x und t gelten soll, sind beide Seiten konstant und gleich $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Für jedes λ haben wir also gewöhnliche Differentialgleichungen für $X(x)$ und $T(t)$. Wir betrachten zuerst die Gleichung für X,

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0.$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Für $\lambda := -\omega^2 < 0$ hat die Gleichung die allgemeine Lösung

$$X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$

Aus den Randbedingungen $X(0) = X(\pi) = 0$ erhalten wir

$$A = 0, \quad \omega \in \mathbb{N},$$

und somit $\lambda = -n^2$ für $n \in \mathbb{N}$.

Für $\lambda = 0$ hat die Gleichung die allgemeine Lösung

$$X(x) = A + Bx.$$

Aus den Randbedingungen erhalten wir $A = B = 0$ und somit haben wir nur die triviale Lösung in diesem Fall.

Für $\lambda := \omega^2 > 0$ hat die Gleichung die allgemeine Lösung

$$X(x) = A\cosh(\omega x) + B\sinh(\omega x).$$

Aus den Randbedingungen erhalten wir $A = B = 0$ und auch hier haben wir nur die triviale Lösung. Die Gleichung

$$T'(t) = \lambda T(t)$$

für $\lambda = -n^2 < 0$ hat die allgemeine Lösung

$$T(t) = Ce^{\lambda t}.$$

Also für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben wir eine Lösung der Form

$$v_n(x,t) = e^{-n^2 t}\sin(nx).$$

Jetzt verwenden wir das Superpositionsprinzip: die Funktion der Form

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2 t}\sin(nx)$$

Bitte wenden!

ist eine Lösung des homogenen Problems. Um die Koeffizienten C_n zu bestimmen, machen wir einen Koeffizientenvergleich. Mit der Anfangsbedingung haben wir

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx) = \sin x - 3\sin(2x) + 2\sin(3x).$$

Also $C_1 = 1$, $C_2 = -3$, $C_3 = 2$ und $C_n = 0$ für andere Werte von n. Somit gilt

$$v(x,t) = e^{-t}\sin(x) - 3e^{-4t}\sin(2x) + 2e^{-9t}\sin(3x).$$

Die Lösung lautet dann

$$u(x,t) = 1 + \frac{1}{\pi}x + e^{-t}\sin(x) - 3e^{-4t}\sin(2x) + 2e^{-9t}\sin(3x).$$

3. Es handelt sich um eine inhomogene Wellengleichung. Die Lösung eines inhomogenen Problems ist die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Problems zusammen mit einer partikulären Lösung des inhomogenen Problems.

Wir suchen zuerst eine partikuläre Lösung von

$$u_{tt} - u_{xx} = x^2.$$

Die rechte Seite ist unhabhängig von t. Aus diesem Grund suchen wir eine partikuläre Lösung f, die nur von x abhängt. Die Funktion f muss also

$$-f''(x) = x^2$$

erfüllen. Wir wählen $f(x) = -\frac{1}{12}x^4$. Setzen wir $v(x,t) + f(x) = u(x,t)$, dann erfüllt v

$$\begin{aligned} v_{tt} - v_{xx} &= u_{tt} - u_{xx} - f_{tt} + f_{xx} = u_{tt} - u_{xx} - x^2 = 0, \\ v(x,0) &= \sin(x) + \frac{1}{12}x^4, \\ v_t(x,0) &= \cos(x). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Problems finden wir mit der Formel von D'Alembert. Somit gilt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x,t) + f(x), \\ &= \sin(x+t) + \frac{1}{24}(x-t)^4 + \frac{1}{24}(x+t)^4 - \frac{1}{12}x^4. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Wie in der Lösung zur Aufgabe 2 erhalten wir die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\omega_n^2 t} \sin(\omega_n x),$$

wobei $\omega_n = n\pi/L$ für $n \in \mathbb{N}$ aus den Randbedingungen. Zur Bestimmung der Koeffizienten C_n verwenden wir die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\omega_n x) = f(x).$$

Somit brauchen wir die Entwicklung von f als Fourierreihe. Wir setzen die Funktion f ungerade auf dem Intervall $[-L, L]$ fort und die Fourierkoeffizienten sind

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
&= \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \frac{2}{L} x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} \frac{2}{L}(L-x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \frac{8}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^{k+1}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Die Lösung ist somit

$$u(x,t) = 8\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2\pi^2} e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{L}x\right).$$

5. Wir verwenden die Separationsmethode um dieses Problem zu lösen. Wir suchen also Lösungen der Form

$$u(x,y,t) = T(t)X(x)Y(y).$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt

$$T''(t)X(x)Y(y) = c^2 T(t)(X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)),$$

also

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda = c^2\left(\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}\right),$$

Bitte wenden!

und
$$\mu = \lambda - c^2 \frac{Y''(y)}{Y(y)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)},$$
wobei λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten zunächst die Gleichung
$$X''(x) = \frac{\mu}{c^2} X(x).$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

(i) $\mu > 0$: In diesem Fall erhalten wir als allgemeine Lösung
$$X(x) = A\cosh(\omega x) + B\sinh(\omega x),$$
wobei $\omega^2 := \frac{\mu}{c^2}$. Aus den Randbedingungen folgt jedoch, dass $X(0) = X(1) = 0$. Daraus folgt unmittelbar, dass $A = B = 0$. Somit haben wir in diesem Fall nur die triviale Lösung.

(ii) $\mu = 0$: In diesem Fall ist $X(x) = Ax+B$. Durch Einsetzen der Randbedingungen erhält man auch hier nur die triviale Lösung.

(iii) $\mu < 0$: Hier setzen wir $-\omega^2 := \frac{\mu}{c^2}$. Wir erhalten als allgemeine Lösung
$$X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$
Durch Einsetzen der Randbedingung $X(0) = X(1) = 0$ bestimmt man $A = 0$ und $\omega = n\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Nun betrachten wir die Gleichung für Y,
$$Y''(y) = -\frac{\mu - \lambda}{c^2} Y(y) = \left(\omega^2 + \frac{\lambda}{c^2}\right) Y(y).$$

Wir machen wieder eine Fallunterscheidung:

(i) $\frac{\lambda}{c^2} + \omega^2 > 0$: Mit den Randbedingungen für Y erhalten wir hier die triviale Lösung.

(ii) $\frac{\lambda}{c^2} + \omega^2 = 0$: Hier erhalten wir ebenfalls die triviale Lösung.

(iii) $\frac{\lambda}{c^2} + \omega^2 < 0$: Wir setzen $-\alpha^2 = (\frac{\lambda}{c^2} + \omega^2)$, dann ist die allgemeine Lösung von der Form
$$A\cos(\alpha y) + B\sin(\alpha y).$$
Durch Einsetzen der Randbedingung $Y(0) = Y(1) = 0$ bestimmt man $A = 0$ und $\alpha = m\pi$ für $m \in \mathbb{Z}$.

Siehe nächstes Blatt!

Aus der letzten Beobachtung folgt, dass

$$m\pi = \sqrt{-\left(\omega^2 + \frac{\lambda}{c^2}\right)},$$

und somit

$$\lambda = -c^2((n\pi)^2 + (m\pi)^2).$$

Wir betrachten jetzt die Gleichung für $T(t)$,

$$T''(t) = \lambda T(t).$$

Die Lösung lautet

$$T(t) = A\cos(\sqrt{-\lambda}t) + B\sin(\sqrt{-\lambda}t).$$

Aus der Anfangsbedingung für T folgt, dass $A = 0$ und somit

$$T(t) = \sin(|c|\sqrt{(n\pi)^2 + (m\pi)^2}t).$$

Wir verwenden das Superpositionsprinzip und erhalten die Lösung für u,

$$u(x,y,t) = \sum_m \sum_n B_{n,m} \sin(|c|\sqrt{(n\pi)^2 + (m\pi)^2}t)\sin(n\pi x)\sin(m\pi y).$$

Mit dem Hinweis und der zweiten Anfangsbedingung folgt dann

$$B_{2k+1,2l+1}|c|\sqrt{((2k+1)\pi)^2 + ((2l+1)\pi)^2} = 4(-1)^{k+l},$$

und $B_{n,m} = 0$ falls n oder m gerade. Also ist

$$B_{2k+1,2l+1} = \frac{4(-1)^{k+l}}{|c|\sqrt{(2k+1\pi)^2 + ((2l+1)\pi)^2}}.$$

Somit ist die Lösung

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_k \sum_l \frac{4(-1)^{k+l}}{|c|\sqrt{((2k+1)\pi)^2 + ((2l+1)\pi)^2}} \\ &\quad \times \sin(|c|\sqrt{((2k+1)\pi)^2 + ((2l+1)\pi)^2}t) \\ &\quad \times \sin((2k+1)\pi x)\sin((2l+1)\pi y). \end{aligned}$$