# Musterlösung Serie 3

**1.** Der Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ in Verbindung mit der Randbedingung $u(0,t) = X(0)T(t) = 3\sin(2t)$ ergibt

$$T(t) = \frac{3}{X(0)}\sin(2t).$$

Die Differentialgleichung mit dem Produktansatz lautet

$$X(x)T''(t) - X''(x)T(t) + 2X(x)T'(t) + X(x)T(t) = 0.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} X(x)\left(T''(t) + 2T'(t) + T(t)\right) &= X''(x)T(t), \\ \frac{T''(t) + 2T'(t) + T(t)}{T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)}, \end{aligned}$$

und beide Seiten müssen konstant sein. Da $T(t) = 3\sin(2t)/X(0)$, ist die linke Seite gleich

$$\frac{-\frac{12}{X(0)}\sin(2t) + \frac{12}{X(0)}\cos(2t) + \frac{3}{X(0)}\sin(2t)}{\frac{3}{X(0)}\sin(2t)} = -3 + 4\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)},$$

und kann somit nicht konstant sein. Die Methode liefert hier also keine Lösung. Das bedeutet nicht, dass es keine Lösung gibt. In diesem Fall könnte man zum Beispiel überprüfen, dass die Funktion $u(x,t) = 3e^{-x}\sin(2t - 2x)$ die PDG erfüllt.

**2.** Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} u_t &= Du_{xx}, \quad x \in (0,L),\ t > 0, \\ u(0,t) &= Ct, \\ u(L,t) &= 0, \\ u(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Betrachten wir die Funktion

$$v(x,t) = \frac{C}{L}t(L-x)\,,$$

dann erfüllt $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ das inhomogene Problem

$$\begin{aligned} w_t - Dw_{xx} &= -\tfrac{C}{L}(L-x), \quad x \in (0,L),\ t > 0, \\ w(0,t) &= 0, \\ w(L,t) &= 0, \\ w(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Das ursprüngliche Randwertproblem konnten wir somit in ein inhomogenes Problem mit homogenen Randbedingungen transformieren. Wir setzen den Ansatz

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

in die Gleichung ein und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( w_n'(t) + D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 w_n(t) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = -\frac{C}{L}(L-x)\,.$$

Setzen wir $f(x) = -\frac{C}{L}(L-x)$ zu einer ungeraden Funktion auf $[-L, L]$ fort, dann erhalten wir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

wobei

$$D_n = -\frac{2C}{n\pi}$$

für $n > 0$. Somit gilt

$$w_n'(t) + D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 w_n(t) = -\frac{2C}{n\pi}.$$

Die Lösung ist offensichtlich

$$w_n(t) = A_n e^{-D(n\pi/L)^2 t} - \frac{2CL^2}{D\pi^3 n^3}$$

für $n > 0$. Die allgmeine Lösung ist dann

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n e^{-D(n\pi/L)^2 t} - \frac{2CL^2}{D\pi^3 n^3} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,.$$

Damit die Anfangsbedingung $w(x,0) = 0$ erfüllt ist, muss

$$A_n = \frac{2CL^2}{D\pi^3 n^3}$$

für $n \in \mathbb{N}$ gelten. Somit ist die Lösung $u$

$$u(x,t) = \frac{C}{L}t(L-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2CL^2}{D\pi^3 n^3} e^{-D(n\pi/L)^2 t} - \frac{2CL^2}{D\pi^3 n^3} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,.$$

**Siehe nächstes Blatt!**

**3.** Wir betrachten

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && (x,y) \in (0,\pi)\times(0,\pi) \\ u(x,0) = u(x,\pi) &= 0, && x \in [0,\pi]\,, \\ u(0,y) &= 0, && y \in [0,\pi]\,, \\ u(\pi,y) &= \sin(y), && y \in [0,\pi]\,. \end{aligned}$$

Mit dem Separationsansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ haben wir

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \in \mathbb{R},$$

wobei folgende drei Fälle eintreten können

$$\begin{aligned} &\lambda = \omega^2 > 0: && Y(y) = A\cosh(\omega y) + B\sinh(\omega y), \\ &\lambda = 0: && Y(y) = A + By, \\ &\lambda = -\omega^2: && Y(y) = A\sin(\omega y) + B\cos(\omega y). \end{aligned}$$

Die Randbedingung $u(x,0) = u(x,\pi) = 0$ ergibt, dass nur der Fall $\lambda = -\omega^2$ für $\omega \in \mathbb{N}$ eintreten kann und

$$Y_n(y) = A_n \sin(ny)\,.$$

Die Lösung für $X$ lautet

$$X''(x) - n^2 X(x) = 0 \Rightarrow X(x) = B_n \cosh(nx) + C_n \sinh(nx)\,.$$

Der Ansatz für die allgemeine Lösung ist

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cosh(nx) + C_n \sinh(nx)\right)\sin(ny)$$

und mit der Bedingung $u(\pi,y) = \sin(y)$ erhalten wir

$$u(\pi,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(ny) = \sin(y).$$

Daraus folgt unmittelbar $D_n = 0$ für $n \neq 1$ und $D_1 = 1$. Mit den Randbedingung $u(0,y)$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= B_n \cosh(n\pi) + C_n \sinh(n\pi), \quad n \neq 1\,, \\ 1 &= B_1 \cosh(\pi) + C_1 \sinh(\pi)\,, \\ 0 &= B_n \cosh(0) + C_n \sinh(0)\,, \end{aligned}$$

Daraus folgt $B_1 = B_n = C_n = 0$ für $n \neq 1$ und $C_1 = \frac{1}{\sinh(\pi)}$. Damit ist die Lösung

$$u(x,y) = \frac{1}{\sinh(\pi)} \sinh(x)\sin(y).$$

**Bitte wenden!**

**4.** Wir wenden die Fouriertransformation auf die partielle Differentialgleichung an, wobei wir nur die Variable $y$ transformieren. Die partielle Differentialgleichung ist nun

$$\begin{aligned} \hat{u}_{xx}(x,\omega) - \omega^2 \hat{u}(x,\omega) &= 0, \\ \hat{u}(0,\omega) &= \hat{f}(\omega), \\ \hat{u}(L,\omega) &= \hat{g}(\omega). \end{aligned}$$

Die Lösung ist dann

$$\hat{u}(x,\omega) = A(\omega)e^{\omega x} + B(\omega)e^{-\omega x}$$

und die Randbedingungen sind

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= A(\omega) + B(\omega), \\ \hat{g}(\omega) &= A(\omega)e^{L\omega} + B(\omega)e^{-L\omega}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Lösung

$$\hat{u}(x,\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)e^{-L\omega} - \hat{g}(\omega)}{e^{-L\omega} - e^{L\omega}} e^{x\omega} + \frac{\hat{g}(\omega) - \hat{f}(\omega)e^{L\omega}}{e^{-L\omega} - e^{L\omega}} e^{-x\omega}$$

und die Rücktransformation ist

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x,\omega) e^{-i\omega y} dy.$$

**5.** Die Fouriertransform $\hat{f}$ einer Funktion $f$ in mehreren Variablen ist wie folgt definiert:

$$\hat{f}(y_1,\ldots,y_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\ldots,x_n) e^{-i\vec{y}\cdot\vec{x}}\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Wir verwenden die Fouriertransform, um die Gleichung zu vereinfachen ($y = \vec{y}$)

$$(1 + |y|^2)\hat{u}(y) = \hat{f}(y),$$

für $y \in \mathbb{R}^n$. Die Lösung ist dann

$$\hat{u}(y) = \frac{\hat{f}(y)}{1 + |y|^2}$$

und im ursprünglichen $\mathbb{R}^n$

$$u(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{f}(y)}{1+|y|^2} e^{iy\cdot x}\, dy_1 \cdots dy_n.$$