Musterlösung Serie 4

1. Wir leiten eine Formel für die Lösung der 2-dimensionalen Wellengleichung mithilfe der Kirchhoff-Formel in drei Dimensionen her.

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 \Delta v &= 0, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ v(x,0) &= \tilde{f}(x), \\ v_t(x,0) &= \tilde{g}(x), \end{aligned}$$

gegeben ist durch die Formel von Kirchhoff:

$$v(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int\limits_{S_{ct}} \tilde{f}(x+y) ds(y) \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int\limits_{S_{ct}} \tilde{g}(x+y) ds(y).$$

Hier integriert man über S_{ct}, die Sphäre mit Radius ct und Mittelpunkt 0. Wir setzen jetzt

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_1, x_2, x_3) &:= f(x_1, x_2), \\ \tilde{g}(x_1, x_2, x_3) &:= g(x_1, x_2), \end{aligned}$$

und betrachten die Kirchhoff-Formel in diesem Fall. Wir sehen dann, dass

$$u(x_1, x_2, t) := v(x_1, x_2, 0, t)$$

die Lösung der 2-dimensionalen Wellengleichung ist. Wir leiten nun eine Formel für u her. Wir setzen $x_3 = 0$ in die Formel ein und betrachten das erste Oberflächenintegral für die obere Hemisphäre S_{ct}^+. Hier verwenden wir die Parametrisierung $y_3 = \sqrt{(ct)^2 - y_1^2 - y_2^2}$ und erhalten das Oberflächenelement $ds(y) = |ct/y_3| dy_1 dy_2$. Das erste Integral ist dann

$$\int\limits_{S_{ct}^+} \tilde{f}(x+y) ds(y) = \int\limits_{y_1^2 + y_2^2 \leq (ct)^2} \frac{f(x+y)ct}{\sqrt{(ct)^2 - y_1^2 - y_2^2}} dy_1 dy_2.$$

Das Integral für die untere Hemisphäre S_{ct}^- ist gleich und somit erhalten wir

$$\int\limits_{S_{ct}} \tilde{f}(x+y) ds(y) = 2ct \int\limits_{y_1^2 + y_2^2 \leq (ct)^2} \frac{f(x+y)}{\sqrt{(ct)^2 - y_1^2 - y_2^2}} dy_1 dy_2.$$

Bitte wenden!

Die Berechnung des zweiten Integrals in der Kirchhoff-Formel funktioniert analog und wir erhalten als Gesamtlösung

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi c} \int\limits_{y_1^2+y_2^2\le(ct)^2} \frac{f(x_1+y_1, x_2+y_2)}{\sqrt{(ct)^2-y_1^2-y_2^2}} dy_1 dy_2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi c} \int\limits_{y_1^2+y_2^2\le(ct)^2} \frac{g(x_1+y_1, x_2+y_2)}{\sqrt{(ct)^2-y_1^2-y_2^2}} dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

2. Sei $U(x,s)$ die Laplacetransformation der Funktion $u(x,t)$ bezüglich der Variable t, d.h. $U(x,s) = \mathcal{L}(u)(x,s)$. Die Ableitungsregel besagt, dass

$$\mathcal{L}(u_t)(x,s) = sU(x,s) - u(x,0).$$

Unsere partielle Differentialgleichung transformiert sich dann wie folgt

$$\begin{aligned} sU(x,s) - U_{xx}(x,s) &= 0, \\ U(0,s) &= \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

und wir erhalten die allgemeine Lösung

$$U(x,s) = A(s)e^{-\sqrt{s}x} + B(s)e^{\sqrt{s}x}.$$

Wir wissen, dass die Lösung $u(x,t)$ beschränkt ist für $x \to \infty$. Somit muss ebenfalls die Lösung $U(x,s)$ beschränkt sein für $x \to \infty$ und daraus können wir schliessen, dass $B(s) = 0$. Mit der Randbedingung erhalten wir $A(s) = 1/s$ und somit gilt

$$U(x,s) = \frac{1}{s}e^{-\sqrt{s}x}.$$

Wir suchen nun die Rücktransformation der Funktion $U(x,s)$. Wir machen folgende allgemeine Beobachtung für die Laplacetransformation $F(s)$ einer Funktion $f(t)$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s) &= F(\lambda s) \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda s t} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{f(\frac{r}{\lambda})}{\lambda} e^{-sr} dr \end{aligned}$$

und somit ist die Rücktransformation

$$\mathcal{L}^{-1}(\tilde{F})(t) = \frac{f(\frac{t}{\lambda})}{\lambda}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir setzen nun $G(s) = e^{-\sqrt{s}}/s$ und $\tilde{G}(s) := G(x^2 s)$. Zusammen mit der Linearität der Laplacetransformation erhalten wir

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(e^{-\sqrt{sx^2}}/s)(t) = x^2\mathcal{L}^{-1}(\tilde{G})(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2} du.$$

3. Sei $u(r,\phi) \equiv 1$. Die Funktion u ist somit eine Lösung von

$$\begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0 \quad , & (r,\phi) \in [0,R] \times [0,2\pi) \\ u(R,\phi) & = & 1 \quad , & \phi \in [0,2\pi)\ . \end{array}$$

Somit können wir die Poisson-Formel anwenden und erhalten die Lösung

$$1 = u(r,\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_R(r,\phi-t)\, u(R,t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_R(r,\phi-t)\, dt$$

für alle $(r,\phi) \in [0,R] \times [0,2\pi)$.

4. Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten ist gegeben durch

$$\Delta = \partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\,\partial_{\phi\phi}.$$

Wir verwenden die Methode der Separation der Variablen und setzen

$$u(r,\phi) = R(r)P(\phi).$$

Mit den Randbedingungen für ϕ erhalten wir für diesen Ansatz

$$P(0) = P(\alpha) = 0.$$

Wir setzen den Ansatz in die Gleichung ein,

$$0 = \left(\partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\phi\phi}\right) R(r)P(\phi) = R''(r)P(\phi) + \frac{R'(r)P(\phi)}{r} + \frac{R(r)P''(\phi)}{r^2}.$$

Somit haben wir folgende gewöhnliche Differentialgleichungen

$$r^2 R''(r) + rR'(r) = \lambda R(r), \qquad P''(\phi) = -\lambda P(\phi),$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir lösen zuerst die Gleichung für P. Für den Fall $\lambda \leq 0$ erhalten wir nur die triviale Lösung für P. Für $\lambda > 0$ ist die Lösung gegeben durch

$$P(\phi) = A\cos\left(\phi\sqrt{\lambda}\right) + B\sin\left(\phi\sqrt{\lambda}\right)$$

und mit den Randbedingungen sehen wir, dass

$$\lambda = \left(\frac{n\,\pi}{\alpha}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{Z}^*.$$

Die Familie der Lösungen für P ist dann

$$P_n(\phi) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\phi\right), \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Die Differentialgleichung für R ist nun gegeben durch

$$r^2 R_n''(r) + r R_n'(r) - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 R_n(r) = 0.$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ist eine Euler'sche Differentialgleichung und hat die Lösung

$$R_n(r) = C_n r^{n\pi/\alpha} + D_n r^{-n\pi/\alpha}, \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

für Konstanten C_n und D_n. Wir erhalten die folgende Familie von Lösungen

$$u_n(r,\phi) = R_n(r)P_n(\phi) = \left(A_n r^{n\pi/\alpha} + B_n r^{-n\pi/\alpha}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\phi\right), \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

und mit dem Superpositionsprinzip gilt nun

$$u(r,\phi) = \sum_{n\geq 1} u_n(r,\phi) = \sum_{n\geq 1}\left(A_n r^{n\pi/\alpha} + B_n r^{-n\pi/\alpha}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\phi\right).$$

Wir setzen nun die Randbedingungen ein,

$$u(r_0,\phi) = f(\phi), \qquad u(r_1,\phi) = g(\phi),$$

und erhalten

$$\begin{aligned} f(\phi) &= \sum_{n\geq 1}\left(A_n\, r_0^{n\pi/\alpha} + B_n\, r_0^{-\,n\pi/\alpha}\right)\,\sin\left(\frac{n\,\pi}{\alpha}\,\phi\right) = \sum_{n\geq 1} E_n^0\,\sin\left(\frac{n\,\pi}{\alpha}\,\phi\right) \\ g(\phi) &= \sum_{n\geq 1}\left(A_n\, r_1^{n\pi/\alpha} + B_n\, r_1^{-\,n\pi/\alpha}\right)\,\sin\left(\frac{n\,\pi}{\alpha}\,\phi\right) = \sum_{n\geq 1} E_n^1\,\sin\left(\frac{n\,\pi}{\alpha}\,\phi\right), \end{aligned}$$

wobei wir

$$E_n^0 = A_n r_0^{n\pi/\alpha} + B_n r_0^{-n\pi/\alpha}, \qquad E_n^1 = A_n r_1^{n\pi/\alpha} + B_n r_1^{-n\pi/\alpha},$$

gesetzt haben. Wir sehen, dass E_n^0 und E_n^1 die Koeffizienten der 2α-periodischen Fourierreihe der ungeraden Fortsetzung der Funktionen $f(\phi)$ und $g(\phi)$ sind, nämlich

$$E_n^0 = \frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha f(\phi)\,\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\phi\right)d\phi, \qquad E_n^1 = \frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha g(\phi)\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\phi\right)d\phi.$$

Somit können wir für zwei gegebene Funktionen $f(\phi)$ und $g(\phi)$ die Fourierkoeffizienten berechnen und damit die Koeffizienten A_n und B_n in der Gesamtlösung bestimmen.

Siehe nächstes Blatt!

5. **a)** Offensichtlich ist $g(\sigma)$ maximal, wenn $\cos(\sigma-\varphi)=1$, also $\sigma=\varphi$ und

$$g(\varphi)=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr+r^2}=\frac{R+r}{R-r}.$$

Ebenso ist $g(\sigma)$ minimal, wenn $\cos(\sigma-\varphi)=-1$, also $\sigma=\varphi+\pi$ und

$$g(\varphi+\pi)=\frac{R^2-r^2}{R^2+2Rr+r^2}=\frac{R-r}{R+r}.$$

b) Nach der Poissonformel gilt

$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\partial B(0,R)}\frac{R^2-|0|^2}{|y-0|^2}u(y)dS(y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(R\cos(\sigma),R\sin(\sigma))d\sigma.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
u(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\partial B(0,R)}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^2}u(x)dS(y)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(\sigma)u(r\cos(\sigma),r\sin(\sigma))d\sigma\\
&\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{R+r}{R-r}u(r\cos(\sigma),r\sin(\sigma))d\sigma\\
&= \frac{R+r}{R-r}u(0,0)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
u(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\partial B(0,R)}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^2}u(x)dS(y)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(\sigma)u(r\cos(\sigma),r\sin(\sigma))d\sigma\\
&\ge \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{R+r}{R-r}u(r\cos(\sigma),r\sin(\sigma))d\sigma\\
&= \frac{R-r}{R+r}u(0,0).
\end{aligned}$$

c) Die allgemeine Poissonformel für eine Kreisscheibe $B_R((0,0))$ lautet

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\varphi - \varphi') + r^2} u(R,\varphi') d\varphi'$$

wobei $\Delta u = 0$ in B_R und stetig auf $\overline{B}_R$ ist. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
u(0,y) &= u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36 - r^2}{36 - 12r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi'\right) + r^2} 6\cos(\varphi')\, d\varphi' \\
&= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36 - r^2}{36 - 12r\sin(\varphi') + r^2} \cos(\varphi')\, d\varphi' \\
&= -\frac{3}{\pi}(36 - r^2) \cdot \frac{1}{12r} \ln\left(36 - 12r\sin(\varphi') + r^2\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4\pi r}(36 - r^2)\ln\left(\frac{36 - 12r + r^2}{36 + 12r + r^2}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi y}(36 - y^2)\ln\left(\frac{36 - 12y + y^2}{36 + 12y + y^2}\right).
\end{aligned}$$