Musterlösung Serie 5

1. Nach dem Maximumsprinzip wird das Maximum von u auf dem Rand angenommen. Auf dem Rand können die Funktionswerte von u in Polarkoordinaten ($x = R\cos(\phi)$, $y = R\sin(\phi)$) durch

$$2R^2\cos^2(\phi) - R^2\sin^2(\phi) + 1$$

parametrisiert werden. Die kritischen Punkte liegen bei den Nullstellen von $u_\phi = -3R^2\sin(2\phi)$, also

$$\phi \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}.$$

Die entsprechenden Funktionswerte sind $2R^2 + 1$ und $-R^2 + 1$. Das Maximum ist somit

$$2R^2 + 1.$$

Aus der Mittelwerteigenschaft folgt, dass

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(R^2(\cos(2\phi)+1)/2 + R^2\cos(2\phi) + 1\big)\, d\phi = \frac{R^2}{2} + 1.$$

2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Für eine Funktion $u \in C^1(\overline{U})$ gilt

$$\int_U \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)dx = \int_{\partial U} u(x)\nu_i dS,$$

wobei ν_i die i-te Komponente des Normalenvektors auf dem Rand ist (Satz von Gauss-Green). Somit können wir die partielle Integration verallgemeinern

$$\int_U v(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)dx = -\int_U u(x)\frac{\partial}{\partial x_i}v(x)dx + \int_{\partial U} u(x)v(x)\nu_i dS.$$

Für die zweifache Ableitung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_U v(x)G(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}u(x)dx &= -\int_U \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial(v(x)G(x))}{\partial x_j}dx + \int_{\partial U} v(x)G(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\nu_j dS \\
&= \int_U u(x)\frac{\partial^2(v(x)G(x))}{\partial x_j \partial x_i}dx - \int_{\partial U} u(x)\frac{\partial(v(x)G(x))}{\partial x_j}\nu_i dS \\
&\quad + \int_{\partial U} v(x)G(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\nu_j dS
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Somit haben wir

$$\int\limits_R (vAu_{xx} - u(Av)_{xx}) = \int\limits_{\partial R} (-u(Av)_x\nu_x + vAu_x\nu_x)\, dS$$

und ähnliche Ausdrücke für die anderen Ableitungen. Nach Summation der Ausdrücke ergibt sich die Behauptung.

3. Wir müssen die Green'sche Funktion $G(x, y, \xi, \eta)$ des Gebietes D finden, d.h. wir suchen die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta G(x, y, \xi, \eta) &= \delta(x - \xi, y - \eta) \quad && (x, y) \in D\,, \\ G(x, y, \xi, \eta) &= 0 && (x, y) \in \partial D\,. \end{aligned}$$

Die Fundamentallösung des Δ Operators ist

$$\Gamma(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln\left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\right)\,.$$

a) Mit dem Reflektionsprinzip folgt

$$G(x, y, \xi, \eta) = \Gamma(x, y, \xi, \eta) - \Gamma(x, y, \xi, -\eta)) = \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}\right)\,.$$

b) Mit dem Reflektionsprinzip folgt

$$\begin{aligned} G(x, y, \xi, \eta) = {}& \frac{1}{4\pi} \ln\left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\right) - \frac{1}{4\pi} \ln\left((x + \xi)^2 + (y - \eta)^2\right) \\ & - \frac{1}{4\pi} \ln\left((x - \xi)^2 + (y + \eta)^2\right) + \frac{1}{4\pi} \ln\left((x + \xi)^2 + (y + \eta)^2\right) \end{aligned}$$

4. **a)** Die Greensche Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$ erfüllt

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy})\, G(x, y; \xi, \eta) = \delta\big((x, y) - (\xi, \eta)\big) = \delta(x - \xi)\, \delta(y - \eta),$$

zusammen mit homogenen Randbedingungen auf ∂Q. Der Ansatz erfüllt die homogenen Randbedingungen, somit müssen wir nur die Koeffizienten $a_{m,n}$ bestimmen. Wir können die Dirac-Funktion als Fourierreihe schreiben,

$$\delta(x - \xi)\delta(y - \eta) = \sum_{m,n \geq 1} c_{m,n}(\xi, \eta) \sin(n\pi x) \sin(m\pi y).$$

Wir berechnen die Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} c_{m,n}(\xi, \eta) &= 4 \int_0^1 \int_0^1 \delta(x - \xi)\delta(y - \eta) \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) dx dy \\ &= 4 \int_0^1 \delta(x - \xi) \sin(n\pi x) dx \int_0^1 \delta(y - \eta) \sin(m\pi y) dy \\ &= 4 \sin(n\pi\xi) \sin(m\pi\eta). \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir setzen die Koeffizienten in die Laplace-Gleichung ein und erhalten

$$-\pi^2\big(n^2+m^2\big)a_{m,n}(\xi,\eta) = c_{m,n}(\xi,\eta) = 4\sin(n\pi\xi)\sin(m\pi\eta).$$

Somit ist

$$a_{mn}(\xi,\eta) = -\frac{4}{\pi^2(n^2+m^2)}\sin(n\pi\xi)\sin(m\pi\eta)$$

und wir erhalten die Greensche Funktion

$$G(x,y;\xi,\eta) = -\sum_{m,n\geq 1}\frac{4}{\pi^2(n^2+m^2)}\sin(n\pi\xi)\sin(m\pi\eta)\sin(n\pi x)\sin(m\pi y).$$

b) Die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{array}{rcll} \Delta u(x,y) & = & f(x,y), & (x,y)\in Q\setminus\partial Q, \\ u(x,y) & = & 0, & (x,y)\in\partial Q. \end{array}$$

ist gegeben durch die Integraldarstellung

$$u(x,y) = \int_Q G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Somit haben wir

$$u(x,y) = \sum_{m,n\geq 1}\sin(n\pi x)\sin(m\pi y)\int_Q a_{m,n}(\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Mit der gegebenen Randbedingung für f und den Koeffizienten $a_{m,n}$ haben wir

$$\begin{aligned} & \int_Q a_{m,n}(\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta \\ = \; & \frac{34\cdot 4}{\pi^2(n^2+m^2)}\int_0^1 \sin(3\pi\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi\int_0^1\sin(5\pi\eta)\sin(m\pi\eta)d\eta. \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\int_0^1 \sin(j\pi s)\sin(k\pi s)ds = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j=k, \\ 0, & j\neq k. \end{cases}$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_Q a_{m,n}(\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta &= \frac{34\cdot 4}{\pi^2(3^2+5^2)}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\begin{cases} 1, & (m,n)=(5,3) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi^2}, & (m,n)=(5,3) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Einsetzen liefert die Lösung

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\sin(3\pi x)\sin(5\pi y).$$

Bitte wenden!

5. **a)** Wir definieren $v_n(x) := (x^2-1)^n$. Einmal differenzieren ergibt

$$v_n'(x) = 2xn(x^2-1)^{n-1}$$

und somit haben wir

$$(x^2-1)v_n'(x) = 2xnv_n(x).$$

Wir differenzieren diese Gleichung $n+1$-mal nach x und erhalten mit der Leibniz-Formel

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}v_n(x) - 2x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}v_n(x) + n(n+1)\frac{d^n}{dx^n}v_n(x) &= 0,\\ \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}v_n(x)\right] + n(n+1)\frac{d^n}{dx^n}v_n(x) &= 0.\end{aligned}$$

b) Die Legendre Polynome P_n und P_m erfüllen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n'(x)\right] + n(n+1)P_n(x) &= 0,\\ \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_m'(x)\right] + m(m+1)P_m(x) &= 0.\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $P_m(x)$, die zweite mit $P_n(x)$ und subtrahieren:

$$\begin{aligned}0 &= P_m(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n'(x)\right] - P_n(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_m'(x)\right]\\ &\quad +(n(n+1)-m(m+1))P_n(x)P_m(x)\\ &= \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\left(P_n'(x)P_m(x) - P_n(x)P_m'(x)\right)\right]\\ &\quad +(n(n+1)-m(m+1))P_n(x)P_m(x)\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}0 &= \left[(1-x^2)\left(P_n'(x)P_m(x) - P_n(x)P_m'(x)\right)\right]\Big|_{-1}^{1}\\ &= \int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\left(P_n'(x)P_m(x) - P_n(x)P_m'(x)\right)\right]dx\\ &= (m(m+1)-n(n+1))\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx\end{aligned}$$

und Orthogonalität gilt für $n \neq m$. Für die Normalisierung im Fall $n = m$

Siehe nächstes Blatt!

berechnen wir

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int\limits_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx \\
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx \\
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \Big[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \Big|_{-1}^{1} \\
&\qquad - \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n dx \Big] \\
&= \frac{-1}{2^{2n}(n!)^2} \Big[\int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n dx \Big].
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichheit gilt, da wir $(x^2-1)^n$ nur $n-1$-mal ableiten und somit bleibt ein Faktor (x^2-1) übrig. Insgesamt führen wir die partielle Integration n-mal aus und erhalten

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \Big[\int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n dx \Big] \\
&= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \Big[\int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx \Big] \\
&= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{2(n!)^2 2^{2n}(-1)^n}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}
\end{aligned}
$$

c) Wir berechnen die Koeffizienten c_n

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{2n+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx \\
&= \frac{2n+1}{2} \left[\int\limits_{0}^{1} P_n(x) dx - \int\limits_{-1}^{0} P_n(x) dx \right] \\
&= \begin{cases} (2n+1) \int_0^1 P_n(x) dx, & n \text{ ungerade}, \\ 0, & n \text{ gerade}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

da die $P_n(x)$ symmetrisch sind für n gerade. Mit der Formel

$$
(2n+1) P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)
$$

Bitte wenden!

erhalten wir

$$c_n = \begin{cases} P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0) & n \text{ ungerade,} \\ 0 & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Für gerade k berechnen wir

$$P_k(0) = \frac{(-1)^{k/2}}{2^k} \binom{k}{k/2}$$

und somit können wir die Koeffizienten c_n berechnen.

d) Wir berechnen das innere Produkt von zwei Basiselementen $u_{m,n}$ und $v_{k,l}$

$$\begin{aligned}
\langle u_{m,n}, v_{k,l} \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(m\phi) P_n^m(\cos(\theta)) \sin(k\phi) P_l^k(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(m\phi) \sin(k\phi) d\phi \int_0^{\pi} P_n^m(\cos(\theta)) P_l^k(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(m\phi) \sin(k\phi) d\phi \int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_l^k(x) dx. \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(m\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot \delta_{m,k} \delta_{n,l}
\end{aligned}$$

und somit sehen wir, dass die Basis orthogonal ist.

e) Wie in der Vorlesung sehen wir, dass die Lösung gegeben ist durch

$$u(r, \phi, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} r^n (A_{m,n} \cos(m\phi) + B_{m,n} \sin(m\phi)) P_n^m(\cos(\theta))$$

zusammen mit der Randbedingung

$$u(R, \phi, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} R^n (A_{m,n} \cos(m\phi) + B_{m,n} \sin(m\phi)) P_n^m(\cos(\theta)).$$

Unsere Randbedingung hängt nur von θ und nicht ϕ ab, somit verschwinden sämtliche Koeffizienten $A_{m,n}$ und $B_{m,n}$ für $m \neq 0$. Zusammen mit der Teilaufgabe c) bekommen wir die Koeffizienten

$$R^n A_{0,n} = V c_n$$

Siehe nächstes Blatt!

und somit ist die Lösung

$$
\begin{aligned}
u(r,\phi,\theta) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} V c_n \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n^m(\cos(\theta)) \\
&= V\left[\frac{3}{2}\frac{r}{R}P_1(\cos(\theta)) - \frac{7}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^3 P_3(\cos(\theta)) + \frac{11}{16}\left(\frac{r}{R}\right)^5 P_5(\cos(\theta)) + \dots\right]
\end{aligned}
$$