Musterlösung Serie 6

1. **a)** Mithilfe der Kettenregel berechnen wir

$$
\begin{aligned}
u_x &= w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x \\
u_y &= w_\xi \xi_y + w_\eta \eta_y \\
u_{xx} &= w_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + w_{\eta\eta}\eta_x^2 + w_\xi \xi_{xx} + w_\eta \eta_{xx} \\
u_{xy} &= w_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + w_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + w_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + w_\xi \xi_{xy} + w_\eta \eta_{xy} \\
u_{yy} &= w_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + w_{\eta\eta}\eta_y^2 + w_\xi \xi_{yy} + w_\eta \eta_{yy}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt, dass w die PDG

$$Aw_{\xi\xi} + 2Bw_{\xi\eta} + Cw_{\eta\eta} + Dw_\xi + Ew_\eta + Fw = 0$$

löst, wobei

$$
\begin{aligned}
A(\xi,\eta) &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\
B(\xi,\eta) &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \\
C(\xi,\eta) &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2
\end{aligned}
$$

b) Wir bemerken

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} .$$

Ist die Transformation regulär, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \neq 0 \,,$$

folgt die Behauptung.

2. **a)** Mit dem Verfahren zur Methode der Charakteristiken (siehe S. 61 vom Skript) erhält man die Gleichung

$$u_t - \frac{\alpha^2 t}{x} u_x = -4\alpha^2 t, \qquad u(x,0) = x^2.$$

Somit sind die charakteristischen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}x(t) &= -\tfrac{\alpha^2 t}{x}, & x(0) &= x_0, \\
\tfrac{d}{dt}z(t) &= -4\alpha^2 t, & z(0) &= x_0^2,
\end{aligned}
$$

Bitte wenden!

und die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen sind gegeben durch

$$x^2(t) = x_0^2 - \alpha^2 t^2, \qquad z(t) = x_0^2 - 2\alpha^2 t^2. \tag{1}$$

Somit ist die Lösung

$$u(x,t) = z(t) = (x^2 + \alpha^2 t^2) - 2\alpha^2 t^2 = x^2 - \alpha^2 t^2.$$

Aliter: Die charakteristischen Gleichungen und Anfangsbedingungen sind gegeben durch (Achtung, hier sind y und t vertauscht!)

$$\begin{array}{rclrclrcl} \frac{d}{dt}x(t,s) &=& \alpha^2 y(t,s) & \frac{d}{dt}y(t,s) &=& -x(t,s) & \frac{d}{dt}z(t,s) &=& 4\alpha^2 x(t,s)y(t,s) \\ x(0,s) &=& s & y(0,s) &=& 0 & z(0,s) &=& s^2 \end{array}$$

Mit den ersten beiden Gleichungen erhalten wir

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t,s) = \alpha^2 \frac{d}{dt}y(t,s) = -\alpha^2 x(t,s).$$

Somit ist die Lösung für $x(t,s)$

$$x(t,s) = A(s)\cos(\alpha t) + B(s)\sin(\alpha t),$$

mit Koeffizienten $A(s)$ und $B(s)$. Mit der ersten Differentialgleichung sehen wir, dass

$$y(t,s) = \frac{1}{\alpha^2}\frac{d}{dt}x(t,s) = \frac{1}{\alpha}\left(B(s)\cos(\alpha t) - A(s)\sin(\alpha t)\right).$$

Mit der Anfangsbedingung ist somit

$$s = x(0,s) = A(s), \qquad 0 = y(0,s) = \frac{B(s)}{\alpha},$$

und die Lösungen für x und y sind dann

$$x(t,s) = s\cos(\alpha t), \qquad y(t,s) = -\frac{s}{\alpha}\sin(\alpha t). \tag{2}$$

Für z leiten wir zuerst folgende Gleichung her,

$$4\alpha^2 x(t,s)y(t,s) = -4\alpha s^2 \cos(\alpha t)\sin(\alpha t) = -2\alpha s^2 \sin(2\alpha t)$$

und die Differentialgleichung für z ist dann

$$\frac{d}{dt}z(t,s) = -2\alpha s^2 \sin(2\alpha t).$$

Integration ergibt dann

$$z(t,s) = s^2\cos(2\alpha t) + C(s),$$

Siehe nächstes Blatt!

für eine Funktion $C(s)$. Zur Bestimmung von $C(S)$ verwenden wir die Anfangskurve

$$s^2 = z(0,s) = s^2 + C(s) \quad \Longrightarrow \quad C(s) = 0.$$

Die Lösung ist dann

$$z(t,s) = s^2 \cos(2\alpha t).$$

Wir bemerken, dass

$$x^2 - \alpha^2 y^2 = s^2 \left(\cos^2(\alpha t) - \sin^2(\alpha t)\right) = s^2 \cos(2\alpha t).$$

Somit ergibt sich die Lösung

$$u(x,y) = z(t(x,y), s(x,y)) = x^2 - \alpha^2 y^2.$$

Diese Gleichung beschreibt ein Hyperboloid in $\mathbb{R}^3$.

b) Die Charakteristiken werden in (1) durch die Gleichung für $x(t)$ beschrieben,

$$x^2(t) + \alpha^2 t^2 = x_0^2.$$

Aliter: Die Charakteristiken in $\mathbb{R}^2$ werden durch (2) parametrisiert. Wir sehen, dass

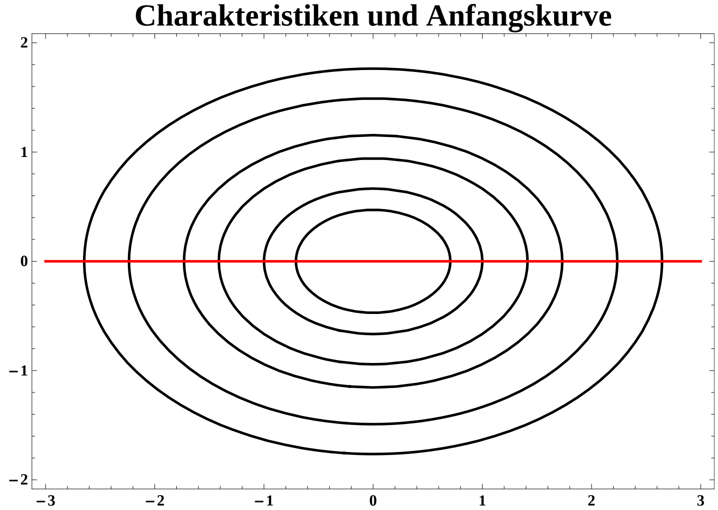
$$x^2 + \alpha^2 y^2 = s^2 \left(\cos^2(\alpha t) + \sin^2(\alpha t)\right) = s^2.$$

Somit können die Charakteristiken beschreiben werden durch

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + \alpha^2 y^2 = s^2\right\}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Diese Kurven sind Ellipsoide um den Ursprung mit Achsen der Länge $|s|$ und $|s/\alpha|$.

Charakteristiken und Anfangskurve



Bitte wenden!

3. a) Wir haben die partielle Differentialgleichung und Anfangsbedingung

$$u_t + e^x u_x = 0, \qquad u(x, \gamma(x)) = g(x).$$

Hier wird die Anfangsbedingung durch die Werte der Funktion u auf der Anfangskurve $(x, \gamma(x)) \in \mathbb{R}^2$ beschrieben. Achte, dass diese Anfangskurve nicht mit der x-Achse übereinstimmt und somit müssen wir unsere Charakteristische Gleichungen anpassen,

$$\begin{array}{rclcrcl} \frac{d}{dt}x(t) & = & e^{x(t)}, & \quad & x(\gamma(x_0)) & = & x_0, \\ \frac{d}{dt}z(t) & = & 0, & & z(\gamma(x_0)) & = & g(x_0). \end{array}$$

Die allgemeine Lösung für x ist

$$x(t) = \log\left(\frac{1}{C-t}\right).$$

Die Konstante C wird aus der Anfangsbedingung berechnet,

$$\log\left(\frac{1}{C-\gamma(x_0)}\right) = x_0 \Longleftrightarrow C = e^{-x_0} + \gamma(x_0) = px_0.$$

Somit sind die Lösungen gegeben durch

$$x(t) = \log\left(\frac{1}{px_0 - t}\right), \qquad z(t) = g(x_0).$$

Wir lösen x_0 nach x auf und setzen dies in $u(x(t), t) = z(t)$ ein. Die Lösung ist dann

$$u(x,t) = g\left(\frac{e^{-x}+t}{p}\right).$$

Aliter: Die charakteristischen Gleichungen und Anfangsbedingungen sind gegeben durch (Achtung, hier sind y und t vertauscht!)

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} \frac{d}{dt}x(t,s) & = & e^{x(t,s)} & \quad & \frac{d}{dt}y(t,s) & = & 1 & \quad & \frac{d}{dt}z(t,s) & = & 0 \\ x(0,s) & = & s & & y(0,s) & = & ps - e^{-s} & & z(0,s) & = & g(s). \end{array}$$

Die Lösungen sind dann

$$x(t,s) = -\ln\left(e^{-s} - t\right), \qquad y(t,s) = t + ps - e^{-s}, \qquad z(t,s) = g(s).$$

Wir sehen, dass

$$y + e^{-x} = ps, \tag{3}$$

und somit gilt

$$s = \frac{1}{p}\left(y + e^{-x}\right).$$

Dies setzen wir in die Identität $u(x,y) = z(t(x,y), s(x,y))$ ein und erhalten die Lösung

$$u(x,y) = g\left(\frac{y+e^{-x}}{p}\right). \tag{4}$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Die Charakteristiken sind gegeben durch $x(t)$ (resp. durch (3)). Für $p \neq 0$ schreiben wir diese Familie als

$$t = C - e^{-x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Der Fall $p = 0$ entspricht einem degenerierten Fall. Hier gibt es nur eine charakteristische Kurve, nämlich

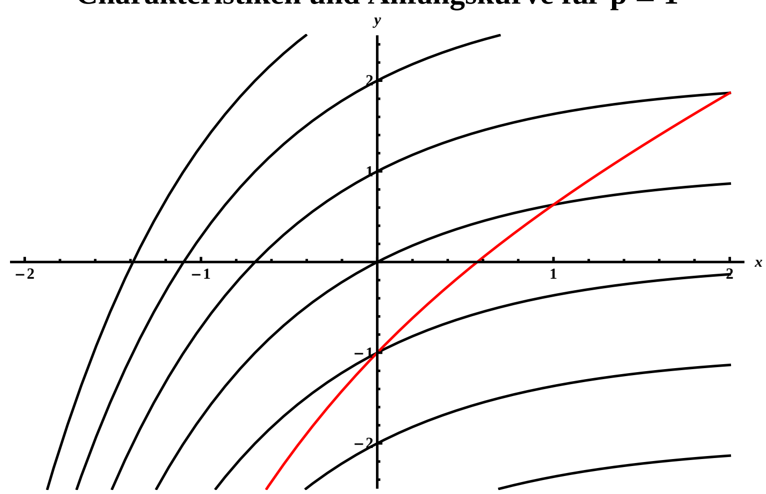
$$t = -e^{-x}.$$

Dieser Fall hat eine einfache Erklärung. Falls $p = 0$, so ist die Anfangskurve ebenfalls

$$t = -e^{-x}.$$

Somit ist die Anfangskurve gleich der charakteristischen Kurve. Angenommen wir wählen einen Punkt $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$. Um den Wert $u(x_0, t_0)$ zu finden, müssen wir eine charakteristische Kurve durch den Punkt (x_0, t_0) finden, die sich mit der Anfangskurve schneidet. Da es jedoch nur eine Kurve gibt, sehen wir, dass diese Strategie nicht ausführbar ist. Somit ist dieses Cauchy-Problem nicht wohldefiniert. Dies widerspiegelt sich auch in unserer Lösung (4).

Charakteristiken und Anfangskurve für p = 1



4. a) Mit dem Verfahren zur Methode der Charakteristiken (siehe S. 61 vom Skript) hat man mit der Gleichung

$$u_t + uu_x = 0, \qquad u(x,0) = f(x),$$

die charakteristischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}x(t) &= z(t), \qquad & x(0) &= x_0, \\ \tfrac{d}{dt}z(t) &= 0, & z(0) &= f(x_0). \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen sind gegeben durch

$$x(t) = x_0 + f(x_0)t, \qquad z(t) = f(x_0). \tag{5}$$

Die Charakteristiken sind Geraden mit Steigung $f(x_0)^{-1}$ und schneiden die x-Achse in x_0. Entlang den Charakteristiken ist die Lösung konstant und gleich $f(x_0)$, bis sich die Charakteristiken schneiden. Für eine Fortsetzung der Lösung müssen andere Methoden verwendet werden.

Aliter: Die charakteristischen Gleichungen und Anfangsbedingungen sind gegeben durch

$$\begin{array}{rclrclrcl} \frac{d}{dr}t(r,s) &=& 1 & \frac{d}{dr}x(r,s) &=& z(r,s) & \frac{d}{dr}z(r,s) &=& 0 \\ t(0,s) &=& 0 & x(0,s) &=& s & z(0,s) &=& F(s) \end{array}$$

mit

$$F(s) = \begin{cases} 1, & -1 \geq s \\ -s, & -1 < s < 1 \\ -1, & 1 \leq s. \end{cases}$$

Die Lösungen der Differentialgleichungen sind

$$t(r,s) = r, \qquad x(r,s) = s + rF(s), \qquad z(r,s) = F(s).$$

Wir sehen, dass

$$x = s + tF(s) = \begin{cases} s + t, & -1 \geq s, \\ s(1-t), & -1 < s < 1, \\ s - t, & 1 \leq s. \end{cases}$$

Äquivalent dazu

$$s = \begin{cases} x - t, & -1 \geq s, \\ \frac{x}{1-t}, & -1 < s < 1, \\ x + t, & 1 \leq s. \end{cases}$$

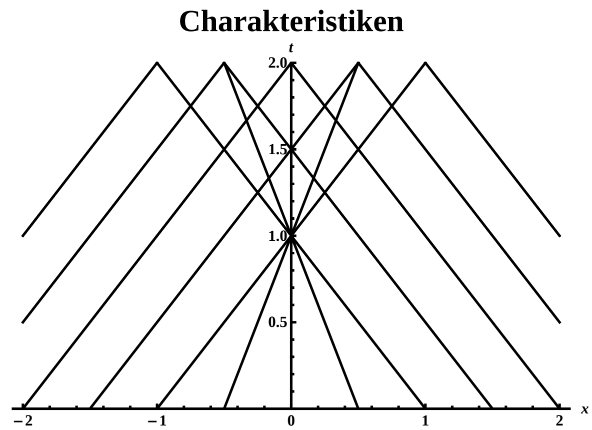
Oben haben wir gesehen, dass $u = F(s)$. Somit ist die Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & -1 \geq x - t, \\ \frac{x}{t-1}, & -1 < \frac{x}{1-t} < 1, \\ -1, & 1 \leq x + t. \end{cases}$$

b) Die Charakteristiken in $\mathbb{R}^2$ sind gegeben durch

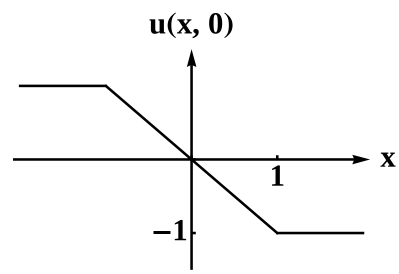
$$t = \begin{cases} x - s, & -1 \geq s, \\ 1 - \frac{x}{s}, & -1 < s < 1, \\ s - x, & 1 \leq s. \end{cases}$$

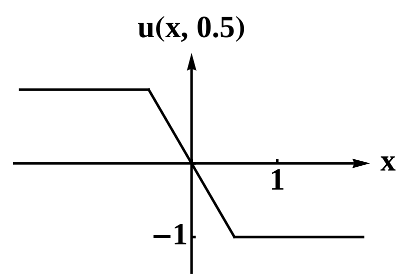
Siehe nächstes Blatt!



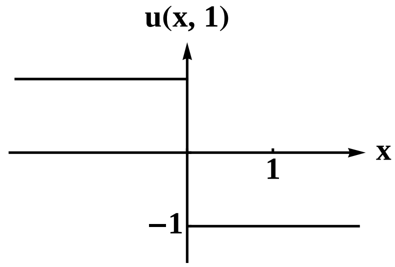
c) Die Zeichnung der Charakteristiken in der (x, t)-Ebene zeigt, dass sich die Charakteristiken entlang der Linie $\{t = 1 + |x|\}$ schneiden. Für einen beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ sehen wir, dass die Lösung $u(x_0, t)$ nur bis zum Zeitpunkt $t = 1 + |x_0|$ existiert. Nach dieser Zeit existiert weiterhin eine Lösung, jedoch wird sie nicht durch die Methode der Charakteristiken bestimmt. Dieses Phänomen nennt man eine Schockwelle.

d) Mit dem Ausdruck für $u(x, t)$ können wir die Lösung für verschiedene Zeitpunkte zeichnen. Man sieht wie die Lösung fortschreitend eine Singularität um $x = 0$ entwickelt. Zum Zeitpunkt $t = 1$ ist die Singularität gegeben und $u(x, t)$ ist keine Funktion mehr.





Bitte wenden!



5. **a)** Die charakteristischen Gleichungen sind

$$\begin{array}{rclcrcl} \frac{d}{dt}x(t) &=& e^{z(t)}, & & x(0) &=& x_0, \\ \frac{d}{dt}z(t) &=& 0, & & z(0) &=& u_0(x_0). \end{array}$$

Die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen sind gegeben durch

$$z(t) = u_0(x_0), \qquad x(t) = e^{u_0(x_0)}t + x_0.$$

Aliter: Die Charakteristiken erfüllen die Gleichungen (Achtung, hier sind y und t vertauscht!)

$$\begin{array}{rclcrcl} \frac{d}{dt}x(t,s) &=& e^{u_0(s)}, & & x(0,s) &=& s, \\ \frac{d}{dt}y(t,s) &=& 1, & & y(0,s) &=& 0. \end{array}$$

Also verläuft die Charakteristik entlang der Geraden $x = e^{u_0(s)}y + s$. D.h. die Gerade mit Steigung $e^{-u_0(s)}$, welche die x-Achse im Punkt $x = s$ schneidet.

b) Aus Aufgabe a) folgt, dass die Charakteristiken mit dieser Anfangsbedingung für $s > 0$ entlang den Geraden $x = t + s$ und für $s < 0$ entlang den Geraden $x = et + s$ verlaufen. Die Charakteristik schneiden sich, es gibt also eine sogenannte Stosswelle (oder Schockwelle). Der Verlauf der Stosswelle ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = \frac{F(u^+(t)) - F(u^-(t))}{u^+(t) - u^-(t)} = \frac{e^{\lim_{s\to 0^-} u_0(s)} - e^{\lim_{s\to 0^+} u_0(s)}}{\lim_{s\to 0^-} u_0(s) - \lim_{s\to 0^+} u_0(s)} = \frac{e-1}{1-0} = e-1.$$

Also ist $\gamma(t) = (e-1)t$. Insbesondere ist also

$$u(x,1) = \begin{cases} 1, & x < e-1, \\ 0, & x > e-1, \end{cases}$$

c) In diesem Fall haben die Charakteristiken durch die Punkte $(s, 0)$ für $s < 0$ die Steigung 1 und e^{-1} für $s > 0$. Im Sektor

$$\left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; e^{-1}x \le t \le x\right\}$$

gibt es also eine Verdünnungswelle. Die Lösung ist dann

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \le t, \\ \frac{x-t}{t(e-1)}, & t < x \le et, \\ 1, & et < x. \end{cases}$$