Musterlösung Serie 7

1. Biegelinie eines elastischen Stabes:

a) Folgende Randbedingungen lassen sich direkt aus der Aufgabenstellung herleiten:

$$u(0) = 0, \qquad u(L) = u_L.$$

Durch die Einspannung am linken Ende haben wir noch zusätzlich die Bedingung

$$u'(0) = 0,$$

da $u'(x) = 0$ für $x < 0$ und u' stetig ist.

b) Wir wenden die Methode der Variationsrechnung an und versuchen ein genügend oft differenzierbares $u : [\,0, L\,] \to \mathbb{R}$ zu finden, das obige RB erfüllt und das das Deformationsenergiefunktional

$$E[u] := \frac{1}{2}\int_0^L (u''(x))^2\,dx$$

minimiert. Es sei also $\varphi : [\,0, L\,] \to \mathbb{R}$ genügend oft differenzierbar mit $\varphi(0) = \varphi(L) = \varphi'(0) = 0$, dann gilt für u

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} E[u+\lambda\varphi] = \frac{1}{2}\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}\int_0^L [\,u'' + \lambda\varphi''\,]^2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}[\,u'' + \lambda\varphi''\,]^2\;dx = \int_0^L u''\varphi''\,dx \\
&= u''\varphi'\Big|_0^L - \int_0^L u^{(3)}\varphi'\,dx = u''(L)\varphi'(L) - u^{(3)}\varphi\Big|_0^L + \int_0^L u^{(4)}\varphi\,dx \\
&= u''(L)\varphi'(L) + \int_0^L u^{(4)}\varphi\,dx\,. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung muss für alle φ mit den oben genannten Eigenschaften gelten, also auch für solche mit $\varphi'(L) = 0$. Daraus bekommen wir die Bedingung für u,

$$\int_0^L u^{(4)}\varphi\,dx = 0,$$

Bitte wenden!

für alle zulässigen φ mit $\varphi'(L) = 0$ und daraus folgt

$$u^{(4)} \equiv 0.$$

Ebenso können wir auch zulässige Funktionen betrachten, die z.B. $\varphi'(L) = 1$ erfüllen und somit erhalten wir

$$1 \cdot u''(L) + \underbrace{\int_0^L u^{(4)} \varphi \, dx}_{=0} = 0$$

und daraus folgt

$$u''(L) = 0.$$

Dies ist die gesuchte zusätzliche natürliche Randbedingung. Wir machen für u den Ansatz

$$u(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\,.$$

Durch Einsetzen der RB erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= D = 0 \\ u'(0) &= C = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} u(L) &= AL^3 + BL^2 = u_L \\ u''(L) &= 6AL + 2B = 0\,. \end{aligned}$$

Dies führt auf

$$A = -\frac{u_L}{2L^3}, \qquad B = \frac{3}{2}\frac{u_L}{L^2}\,,$$

und somit ist die Lösung

$$u(x) = -\frac{u_L}{2L^3}\,x^3 + \frac{3}{2}\frac{u_L}{L^2}\,x^2\,.$$

2. Die Differentialgleichungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= t, \qquad x(0) = x_0, \\ \dot{z}(t) &= 2, \qquad z(0) = h(x_0). \end{aligned}$$

Die Lösungen sind dann

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + x_0, \quad z(t) = 2t + h(x_0).$$

Somit erhalten wir als Gesamtlösung

$$u(x,t) = 2t + h(x - \frac{1}{2}t^2).$$

Der Bereich, in welchem die Funktion u also bestimmt ist, ist

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x - \frac{1}{2}t^2 < 1\}.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** Wir schreiben zuerst das Anfangswertproblem um,

$$u_x + \frac{x+2y-2}{x} u_y = \frac{x+y}{x}, \qquad x > 0,\ y \in \mathbb{R}.$$

Wir haben dann die folgenden charakteristischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{y}(x) &= \tfrac{x+2y-2}{x}, \qquad & y(1) &= y_0, \\ \dot{z}(x) &= \tfrac{x+y}{x}, \qquad & z(1) &= y_0. \end{aligned}$$

Wir lösen zuerst die Gleichung für $y(x)$. Die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)$$

ist allgemein gegeben durch

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} \int u(x) Q(x) dx,$$

wobei $u(x) = e^{\int P(x)dx}$ ein integrierender Faktor ist. In unserem Fall ist $P(x) = -\frac{2}{x}$ und $Q(x) = \frac{x-2}{x}$. Der integrierende Faktor ist dann

$$u(x) = e^{-2\ln(x)} = \frac{1}{x^2}$$

und somit ist

$$y(x) = x^2 \int \frac{1}{x^2} \frac{x-2}{x} dx = 1 - x + Cx^2,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Mit der Anfangsbedingung erhalten wir

$$y(x) = 1 - x + y_0 x^2.$$

Die Gleichung für $z(x)$ lautet dann

$$\dot{z}(x) = \frac{x + 1 - x + y_0 x^2}{x}$$

und wir erhalten die Lösung

$$z(x) = \ln(x) + \frac{y_0}{2} x^2 + \frac{y_0}{2}.$$

Aliter: Die charakteristischen Gleichungen und Anfangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x, \qquad & x(0,s) &= 1, \\ \dot{y} &= x + 2y - 2, \qquad & y(0,s) &= s, \\ \dot{z} &= x + y, \qquad & z(0,s) &= s. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Die Lösung für x lautet

$$\boxed{x(t,s) = e^t.}$$

Für y finden wir zuerst die homogene Lösung y_{hom} der Differentialgleichung. Somit ergibt sich

$$y_{\text{hom}}(t) = Ce^{2t}.$$

Für die Bestimmung von y verwenden wir die Methode der Variation der Konstanten (oder den Ansatz $y_{\text{part}}(t) = Ae^t + B$). Wir setzen $y(t) = C(t)e^{2t}$ in die Gleichung ein und erhalten

$$C'(t) = e^{-t} - 2e^{-2t}.$$

Somit ergibt sich

$$C(t) = -e^{-t} + e^{-2t} + D$$

für eine Konstante D und als Lösung für y haben wir dann

$$y(t) = (-e^{-t} + e^{-2t} + D)e^{2t} = 1 - e^t + De^{2t}$$

Zusammen mit der Anfangsbedingung erhalten wir

$$\boxed{y(t,s) = 1 - e^t + se^{2t}.}$$

Die Gleichung für z lautet somit

$$\dot{z} = x + y = e^t + 1 - e^t + se^{2t} = 1 + se^{2t}.$$

Wir erhalten

$$z(t) = \int (1 + se^{2t})dt = t + \frac{s}{2}e^{2t} + E$$

für eine Konstante E und zusammen mit der Anfangsbedingung ist

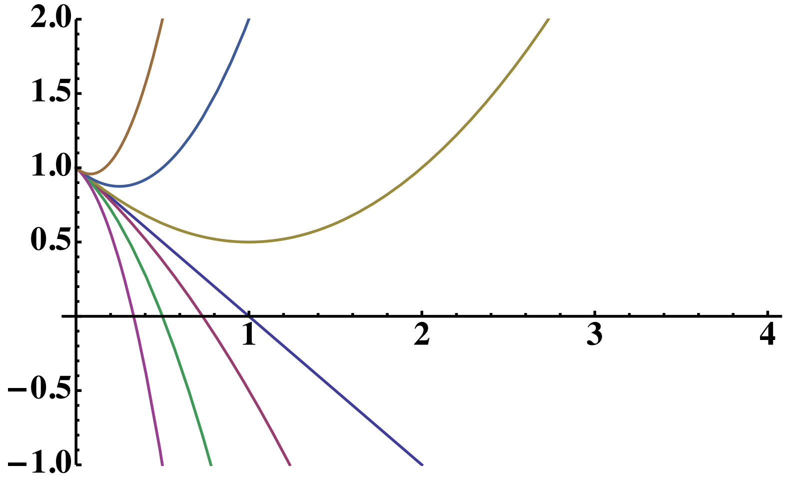
$$\boxed{z(t,s) = t + \frac{s}{2}(1 + e^{2t}).}$$

b) Mit den obigen Lösungen erhalten wir folgende Gleichung für die Charakteristiken in der $x - y$ Ebene, die durch den Punkt $(1, s)$ gehen:

$$y = f(x) = 1 - x + sx^2.$$

Somit ergibt sich folgende Kurvenschar:

Siehe nächstes Blatt!



c) Wir lösen $y(x) = 1 - x + y_0 x^2$ nach y_0 auf und setzen dies in die Lösung für z ein. Wir erhalten dann

$$u(x, y) = \ln(x) + \frac{(x + y - 1)(1 + x^2)}{2x^2}.$$

Aliter: Wir lösen $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$ nach (t, s) auf und erhalten

$$s = \frac{x + y - 1}{x^2}, \qquad t = \ln(x).$$

Einsetzen in $z(t, s)$ ergibt

$$u(x, y) = z(t, s) = \ln(x) + \frac{(x + y - 1)(1 + x^2)}{2x^2}.$$

4. Die charakteristischen Gleichungen sind

$$\frac{dy_\pm}{dx} = -\sin(x) \pm \sqrt{\sin^2(x) + \cos^2(x)} = -\sin(x) \pm 1.$$

Somit sind die Lösungen gegeben durch

$$y_\pm = \cos(x) \pm x + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Die gesuchte Transformation ist dann

$$s(x, y) = \cos(x) + x - y, \quad t(x, y) = \cos(x) - x - y.$$

Wir betrachten nun die Funktion $v(s, t) = u(x, y)$ und setzen sie in die ursprüngliche PDG ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & v_{ss}(-\sin(x) + 1)^2 + 2v_{st}(-\sin(x) + 1)(-\sin(x) - 1) + v_{tt}(-\sin(x) - 1)^2 \\ & + v_s(-\cos(x)) + v_t(-\cos(x)) - 2\sin(x)\Big(v_{ss}(\sin(x) - 1) + v_{st}(\sin(x) - 1) \\ & + v_{st}(\sin(x) + 1) + v_{tt}(\sin(x) + 1)\Big) - \cos^2(x)(v_{ss} + 2v_{st} + v_{tt}) \\ & - \cos(x)(-v_s - v_t). \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Somit haben wir $-4v_{st} = 0$ und die Normalform ist

$$v_{st} = 0.$$

Man überprüft leicht, dass die allgemeine Lösung gegeben ist durch $v(s,t) = F(s) + G(t)$ für Funktionen F und G, die von den Anfangsbedingungen hergeleitet werden. Somit ist die allgemeine Lösung

$$u(x,y) = F(\cos(x) + x - y) + G(\cos(x) - x - y).$$

5. **a)** In diesem Fall ist also $F(u) = u^2/2$ in Burgers-Gleichung. Offensichtlich verlaufen die Charakteristiken, welche die x-Achse im negativen Bereich oder in $x > 1$ schneiden senkrecht (d.h. parallel zur y-Achse) und jene, welche die x-Achse im Punkt $x = s$, $s \in [0,1]$ schneiden, entlang den Geraden $x = y + s$. Es gibt also sowohl eine Verdünnungswelle als auch eine Schockwelle, welche sich für $y < 2$ unabhängig voneinander entwickeln. Für $y < 2$ verläuft die Schockwelle entlang $x = y/2 + 1$ (siehe Vorlesung).

b) Für $y > 2$ gibt es eine erneute Schockwelle durch das Aufeinandertreffen der Charakteristiken der Verdünnungswelle sowie jener Charakteristiken, welche parallel zu y-Achse verlaufen. Sei $(\gamma(y), y)$ der Verlauf dieser Schockwelle (d.h. $u(x,y)$ "springt" entlang diese Pfades). Nun ist $u(x,y)$ im Bereich der Verdünnungswelle implizit gegeben durch $F'(u(x,y)) = x/y$ und somit ist $u(x,y) = x/y$. Insbesondere ist $u_-(y) = \gamma(y)/y$. Andererseits ist $u^+(y) = 0$ da u sich entlang der senkrecht verlaufenden Charakterstiken nicht ändert. $\gamma'(y)$ erfüllt also

$$\gamma'(y) = \frac{F(u^+(y)) - F(u^-(y))}{u^+(y) - u^-(y)} = \frac{1}{2}(u^+(y) + u^-(y)) = \frac{\gamma(y)}{2y}.$$

c) Aus obiger Differentialgleichung ergibt sich also

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{1}{2y}$$

und somit

$$\log(\gamma(y)) = \frac{1}{2}\log(y) + C = \log(e^C\sqrt{y}).$$

Also haben wir

$$\gamma(y) = e^C\sqrt{y}.$$

Da die Schockwelle den Punkt $(2,2)$ durchlaufen muss, ist die Anfangsbedingung gegeben durch $\gamma(2) = 2$ und somit gilt $C = \log(\sqrt{2})$.

d) Aus Aufgabe **c)** und der Definition der Verdünnungswelle folgt, dass

$$u(x,y) = \frac{x}{y}$$

für $0 \leq x \leq \sqrt{2y}$ und $y > 2$. Aus der Beschreibung der Charakteristiken in Aufgabe **a)** folgt, dass $u(x,y) = 0$ für $y > 2$ und x ausserhalb dieses Intervals.

Siehe nächstes Blatt!

6. Für hinreichend gutmütige F dürfen wir Ableitung und Integral vertauschen. Mit anderen Worten

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= v(x,t,t) + \int_0^t v_t(x,t,s)ds \\ &= v(x,t,t) + \int_0^t v_{xx}(x,t,s)ds \\ &= F(x,t) + u_{xx}(x,t). \end{aligned}$$

Ausserdem ist

$$u(x,0) = \int_0^0 v(x,t,s)ds = 0$$

und

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \int_0^t v(0,t,s)ds = \int_0^t 0ds = 0, \\ u(L,t) &= \int_0^t v(L,t,s)ds = \int_0^t 0ds = 0. \end{aligned}$$

7. Wir wenden die Fouriertransformation auf die x-Variable an und erhalten die Gleichung

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(t,k) + k^2\hat{u}(t,k) - t\hat{u}(t,k) &= 0, \\ \hat{u}(0,k) &= \hat{f}(k). \end{aligned}$$

Somit haben wir die gewöhnliche Differentialgleichung in t

$$\hat{u}_t = (t-k^2)\hat{u},$$

und die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\hat{u}(t,k) = C(k)e^{\frac{1}{2}t^2-k^2t}.$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingung haben wir

$$\hat{u}(t,k) = \hat{f}(k)e^{\frac{1}{2}t^2-k^2t}.$$

Nun suchen wir die Rücktransformation von $\hat{u}$. Wir schreiben $\hat{u}$ als

$$\hat{u}(t,k) = \frac{1}{\sqrt{2t}}\, e^{\frac{1}{2}t^2}\, \hat{f}(k)\sqrt{2t}\, e^{-k^2t} = \frac{1}{\sqrt{2t}}\, e^{\frac{1}{2}t^2}\, \hat{f}(k)\, \hat{g}(k)$$

und die Inverse von $\hat{g}$ ist gegeben durch $g(x) = e^{-x^2/(4t)}$. Zusammen mit dem Faltungssatz erhalten wir

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2t}}\, e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} f(\xi)d\xi.$$

Bitte wenden!

8. Wir machen den Separationsansatz

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

und setzen diesen in die PDG ein. Wir erhalten

$$X''Y + XY'' + \frac{\pi^2}{a^2}XY = 0.$$

Das lässt sich umformen zu

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{=:\alpha} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{=:\beta} + \frac{\pi^2}{a^2} = 0.$$

Da der erste Term nur von x und der zweite nur von y abhängt, müssen beide Terme konstant sein und für diese Konstanten gilt

$$\alpha + \beta + \frac{\pi^2}{a^2} = 0.$$

Wir können somit die partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen aufspalten,

$$X'' - \alpha X = 0, \qquad Y'' - \beta Y = 0.$$

Mit den homogenen Randbedingungen erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} u(0,y) &= X(0)Y(y) = 0, \\ u(a,y) &= X(a)Y(y) = 0, \\ u(x,0) &= X(x)Y(0) = 0, \end{aligned}$$

und folglich sind die Randbedingungen $X(0) = X(a) = 0$ für X und $Y(0) = 0$ für Y. Die gewöhnliche Differentialgleichung für X lautet demnach

$$X'' - \alpha X = 0, \qquad X(0) = X(a) = 0.$$

Für die Lösung müssen wir die Fälle $\alpha < 0$, $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ getrennt betrachten.

- Im Fall $\alpha = 0$ wird die Differentialgleichung zu

  $$X'' = 0$$

  und hat die allgemeine Lösung

  $$X(x) = Ax + B.$$

  Die Randbedingungen ergeben

  $$X(0) = B = 0 \quad \text{und} \quad X(a) = A\,a = 0 \;\Rightarrow\; A = 0.$$

  Also hat dieser Fall nur die triviale Lösung $X(x) \equiv 0$.

Siehe nächstes Blatt!

- Im Fall $\alpha =: \omega^2 > 0$ wird die Differentialgleichung zu
$$X'' - \omega^2 X = 0$$
und hat die allgemeine Lösung
$$X(x) = A\,\cosh(\omega x) + B\,\sinh(\omega x).$$
Die Randbedingungen ergeben
$$X(0) = A = 0 \quad \text{und} \quad X(a) = B\,\sinh(\omega a) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0.$$
Also hat auch dieser Fall nur die triviale Lösung $X(x) \,\equiv\, 0$.

- Im Fall $\alpha =: -\,\omega^2 < 0$ wird die Differentialgleichung zu
$$X'' + \omega^2 X = 0$$
und hat die allgemeine Lösung
$$X(x) = A\,\cos(\omega x) + B\,\sin(\omega x).$$
Die Randbedingungen ergeben
$$X(0) = A = 0 \quad \text{und} \quad X(a) = B\,\sin(\omega a) = 0.$$
Dies lässt sich genau dann erfüllen, wenn entweder $B = 0$ oder wenn
$$\sin(\omega a) = 0 \;\Leftrightarrow\; \omega = \frac{\pi n}{a} \;\text{ mit } n \in \mathbb{Z}.$$
Wir bekommen also eine abzählbare Menge von möglichen Werten für ω und folglich auch für α:
$$\alpha_n = -\,\omega_n^2 = -\,\frac{\pi^2 n^2}{a^2} \;\text{ mit } n \in \mathbb{N}$$
Es genügt hier alle $n \in \mathbb{N}$ zu betrachten, denn negative Werte von n ergeben keine neuen Werte für α und wegen $\cos(-\omega x) = \cos(\omega x)$ bzw. $\sin(-\omega x) = -\sin(\omega x)$ auch keine neuen Lösungen.

Damit haben wir die Basislösungen für X gefunden:
$$X_n(x) = B_n\,\sin\left(\frac{\pi n}{a}\,x\right)$$
Nun betrachten wir die gewöhnliche Differentialgleichung für Y. Wir haben
$$\beta_n = -\,\alpha_n - \frac{\pi^2}{a^2} = \left[\,n^2 - 1\,\right]\frac{\pi^2}{a^2}$$
und die Differentialgleichung für Y lautet
$$Y_n'' - \beta_n Y_n = Y_n'' - \left[\,n^2 - 1\,\right]\frac{\pi^2}{a^2}\,Y_n = 0.$$
Für die Lösung müssen wir die Fälle $n = 1$ und $n \geq 2$ getrennt betrachten.

Bitte wenden!

- **Fall** $n = 1$: Es gilt $\beta_1 = 0$ und die allgemeine Lösung ist

$$Y_1(y) = C_1 y + D_1.$$

Aus der homogenen Randbedingung für Y folgt

$$Y_1(0) = D_1 = 0$$

und die Basislösung ist

$$Y_1(y) = C_1 y.$$

- **Fall** $n \geq 2$: Es gilt $\beta_n > 0$ und die allgemeine Lösung ist

$$Y_n(y) = C_n \cosh\left(\sqrt{\beta_n}\, y\right) + D_n \sinh\left(\sqrt{\beta_n}\, y\right).$$

Aus der homogenen Randbedingung für Y folgt

$$Y_n(0) = C_n = 0$$

und die Basislösungen sind

$$Y_n(y) = D_n \sinh\left(\sqrt{\beta_n}\, y\right) = D_n \sinh\left(\sqrt{n^2 - 1}\, \frac{\pi}{a}\, y\right).$$

Der Lösungsansatz ergibt sich durch lineare Superposition der Basislösungen:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) \\ &= E_1\, y \sin\left(\frac{\pi}{a}\, x\right) + \sum_{n=2}^{\infty} E_n\, \sinh\left(\sqrt{n^2-1}\, \frac{\pi}{a}\, y\right) \sin\left(\frac{\pi n}{a}\, x\right) \end{aligned}$$

Die konstanten E_n können nun mit der inhomogenen Randbedingung bestimmt werden

$$u(x,b) = E_1\, b \sin\left(\frac{\pi}{a}\, x\right) + \sum_{n=2}^{\infty} E_n\, \sinh\left(\sqrt{n^2-1}\, \frac{\pi}{a}\, b\right) \sin\left(\frac{\pi n}{a}\, x\right) = 3\, \sin\left(\frac{\pi}{a}\, x\right)$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$E_1\, b = 3 \;\Rightarrow\; E_1 = \frac{3}{b} \;\text{ und }\; E_n = 0 \;\text{ für alle } n \geq 2.$$

Somit ist die Gesamtlösung

$$u(x,y) = 3\, \frac{y}{b}\, \sin\left(\frac{\pi}{a}\, x\right).$$

Siehe nächstes Blatt!

9. Wir verwenden die Methode der Separation der Variablen und für den Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ erhalten wir

$$\frac{T''(t) + aT'(t)}{T(t)} + b = \frac{c^2 X''(x)}{X(x)} = \mu \in \mathbb{R}.$$

Wir lösen zuerst die Differentialgleichung für $X(x)$,

$$X''(x) = \mu c^2 X(x).$$

Für $\mu > 0$, $\mu = 0$ erhalten wir nur triviale Lösungen mit den gegebenen Randbedingungen. Wenn wir $\mu c^2 = -\omega^2$ setzen, erhalten wir

$$X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$

Mit den Randbedinungen $X(0) = X(l) = 0$ sehen wir, dass

$$\omega = \frac{n\pi}{l}.$$

Somit ist $\mu = -\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2$ und wir betrachten nun die Differentialgleichung für $T(t)$,

$$T''(t) + aT'(t) + \left(b + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2\right) T(t) = 0.$$

Diese ist eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Mit dem Ansatz $T(t) = Ce^{\lambda t}$ erhalten wir das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + a\lambda + \left(b + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2\right) = 0.$$

Wir definieren

$$\Delta_n := \frac{a^2 - 4\left(b + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2\right)}{4}$$

und erhalten die Lösungen für verschiedene Werte von n

$$T_n(t) = \begin{cases} A_n e^{-\frac{a}{2}t}\sinh(\sqrt{\Delta_n}t) + B_n e^{-\frac{a}{2}t}\cosh(\sqrt{\Delta_n}t) & \text{falls } \Delta_n > 0, \\ e^{-\frac{a}{2}t}(C_n + D_n t) & \text{falls } \Delta_n = 0, \\ E_n e^{-\frac{a}{2}t}\sin(\sqrt{-\Delta_n}t) + F_n e^{-\frac{a}{2}t}\cos(\sqrt{-\Delta_n}t) & \text{falls } \Delta_n < 0. \end{cases}$$

Wir setzen die Randbedingung $T_n'(0) = 0$ ein und erhalten

$$T_n(t) = \begin{cases} A_n\left(e^{-\frac{a}{2}t}\sinh(\sqrt{\Delta_n}t) + \frac{2\sqrt{\Delta_n}}{a}e^{-\frac{a}{2}t}\cosh(\sqrt{\Delta_n}t)\right) & \text{falls } \Delta_n > 0, \\ C_n\, e^{-\frac{a}{2}t}(1 + \frac{a}{2}t) & \text{falls } \Delta_n = 0, \\ E_n\left(e^{-\frac{a}{2}t}\sin(\sqrt{-\Delta_n}t) + \frac{2\sqrt{-\Delta_n}}{a}e^{-\frac{a}{2}t}\cos(\sqrt{-\Delta_n}t)\right) & \text{falls } \Delta_n < 0. \end{cases}$$

Bitte wenden!

Die Lösung ist dann gegeben durch

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

wobei

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx.$$

10. Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung mit nicht-trivialen Anfangsbedingungen ist gegeben durch die Summe der Lösung der homogenen Wellengleichung mit nicht-trivialen Anfangsbedingungen zusammen mit der Lösung der inhomogenen Wellengleichung mit trivialen Anfangsbedingungen.

Die Lösung ist somit gegeben durch die Formel von d'Alembert zusammen mit der Formel von Serie 1, Aufgabe 5:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(x')dx' \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int\limits_0^t \int\limits_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} Q(x',t')dx'dt'. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von

$$f(x)=5, \qquad g(x)=x^2, \qquad Q(x,t)=e^x$$

erhalten wir

$$u(x,t) = 5 + x^2 t + \frac{1}{3}c^2t^3 + \frac{1}{2c^2}(e^{x+ct}+e^{x-ct}-2e^x).$$