Temperatur unter der Erdoberfläche

Die Temperatur in Tiefe $x > 0$ zur Zeit t werde mit $u(x,t)$ bezeichnet. Die Temperatur an der Erdoberfläche sei eine gegebene periodische Funktion

$$u(0,t) = f(t)$$

mit Periode T und Mittelwert 0. Die Temperatur im Erdinneren erfülle die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \alpha\, u_{xx}$$

Wir nehmen an, dass sie für $x \to \infty$ gegen Null geht.

Um die Lösung dieses Problems zu finden, machen wir den Ansatz, dass für jede Tiefe x die Funktion $t \mapsto u(x,t)$ ebenfalls periodisch mit Periode T ist. Dann lässt sie sich in eine Fourierreihe bzgl. der Zeit t entwickeln:

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x)\, e^{\frac{2\pi i n}{T} t}$$

Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung gibt, dass

$$\frac{2\pi i n}{T}\, c_n(x) = \alpha\, c_n''(x) \qquad \text{für alle } n \in \mathbf{Z}$$

Die Wurzeln von $\frac{2\pi i n\, t}{\alpha T}$ sind $\pm\sqrt{\frac{\pi|n|}{\alpha T}}\,(1+i)$, wenn $n > 0$, und $\pm\sqrt{\frac{\pi|n|}{\alpha T}}\,(1-i)$, wenn $n < 0$. Folglich ist $c_n(x)$ eine Linearkombination von

$$\begin{array}{cccc} e^{\sqrt{\frac{\pi|n|}{\alpha T}}\,(1+i)x} & \text{und} & e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{\alpha T}}\,(1+i)x} & \text{wenn } n > 0 \\ e^{\sqrt{\frac{\pi|n|}{\alpha T}}\,(1-i)x} & \text{und} & e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{\alpha T}}\,(1-i)x} & \text{wenn } n < 0 \\ x & \text{und} & 1 & \text{wenn } n = 0 \end{array}$$

Die Bedingung, dass $u(x,t)$ für für $x \to \infty$ gegen Null geht, impliziert, dass im Fall $n > 0$ nur die Terme $e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|\,t}{\alpha T}}(1+i)x}$ vorkommen, im Fall $n < 0$ nur die Terme $e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|\,t}{\alpha T}}(1-i)x}$, und dass $c_n(x) = 0$.

Also ergibt sich als Lösung

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0)\, e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{\alpha T}}\,(1+i)x} e^{\frac{2\pi i n}{T} t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(0)\, e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{\alpha T}}\,(1-i)x} e^{-\frac{2\pi i n}{T} t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{\alpha T}}\, x} \Big(c_n(0)\, e^{\frac{2\pi i n}{T} t - \sqrt{\frac{\pi n}{\alpha T}}\, ix} + c_{-n}(0)\, e^{-\frac{2\pi i n}{T} t + \sqrt{\frac{\pi n}{\alpha T}}\, ix} \Big) \\ &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{\alpha T}}\, x} c_n(0)\, e^{\frac{2\pi i n}{T}(t - \sqrt{\frac{T}{4\alpha\pi|n|}}\, x)} \end{aligned}$$

wobei $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} c_n(0)\, e^{\frac{2\pi i n}{T}t}$ die Fourierreihe von $f(t)$ ist.

Ist insbesondre

$$f(t) = \sin\frac{2\pi}{T}t = \frac{1}{2i}\Big(e^{\frac{2\pi i}{T}t} - e^{-\frac{2\pi i}{T}t}\Big)$$

so ist

$$u(x,t) = \frac{1}{2i}e^{-\sqrt{\frac{\pi}{\alpha T}}x}\Big(e^{\frac{2\pi i}{T}(t-\sqrt{\frac{T}{4\alpha\pi}}\,x)} - e^{-\frac{2\pi i}{T}(t-\sqrt{\frac{T}{4\alpha\pi}}\,x)}\Big) = e^{-\sqrt{\frac{\pi}{\alpha T}}\,x}\sin\frac{2\pi}{T}(t-\varphi(x))$$

mit $\varphi(x) = \sqrt{\frac{T}{4\alpha\pi}}\,x$.
In der Tiefe x hat man also die Sinusschwingung der Erdoberfläche, aber gedämpft um den Faktor $e^{-\sqrt{\frac{\pi}{\alpha T}}\,x}$ und mit der Phasenverschiebung $\varphi(x)$. In einem realistischen Modell ($T = 1$ Jahr) ergibt sich für $x = 4$ Meter eine Phasenverschiebung von einem halben Jahr. In dieser Tiefe ist es also im Winter am wärmsten und im Sommer am kältesten.

Referenz: H.Dym, H. McKean: Fourier Series and Integrals. Academic Press 1972, Abschnitt 1.8.5