Lösungen zur Prüfung
Lineare Algebra I/II für D-MAVT

1. Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn alle Kreuzchen richtig gesetzt sind, -1 falls nicht alle Kreuzchen richtig sind und 0 falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

		wahr	falsch
a)	Es seien v_1, v_2 zwei Eigenvektoren der Matrix A. Dann ist auch $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor von A.		$\times$
b)	Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Dann ist auch A^2 diagonalisierbar.	$\times$	
c)	Für zwei $n \times n$-Matrizen A, B gilt $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(B))$ genau dann, wenn A und B den Eigenwert 0 mit der selben algebraischen Vielfachheit besitzen.		$\times$
d)	Sei A eine $n \times n$-Matrix und b ein Eigenvektor von A. Dann hat das Gleichungssystem $Ax = b$ mindestens eine Lösung.		$\times$
e)	Wenn eine Matrix A invertierbar ist, so ist auch $A^\top$ invertierbar.	$\times$	
	Wenn eine Matrix A diagonalisierbar ist, so ist auch $A^\top$ diagonalisierbar.	$\times$	
f)	Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $\ker(f) = \{0\}$.		$\times$
	Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\ker(f) = \{0\}$.	$\times$	
g)	Der Vektorraum $\mathcal{P}_2$ der Polynome vom Grad ≤ 2 hat genau 3 verschiedene Unterräume der Dimension 2.		$\times$
h)	Die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ haben die selben Eigenwerte.	$\times$	
i)	Durch $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle := x_1 y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.		$\times$
	Durch $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle := x_1 y_2 + x_2 y_1$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.		$\times$
j)	Die Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ regulär.	$\times$	

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

a) **[6 Punkte]** Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Geben Sie weiter eine diagonale Matrix D und eine Matrix T an, so dass $D = T^{-1}AT$ gilt.

b) **[1 Punkt]** Ist A invertierbar?

c) **[3 Punkte]** Kann man eine orthogonale Matrix T finden, welche $D = T^{-1}AT$ erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & -8 \\ 0 & 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -8 \\ 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-3-\lambda)((5-\lambda)(-7-\lambda)+32) = (-3-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-3) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda+3)(\lambda+3) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte lauten also $\lambda_1 = 1$ (algebraische Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = -3$ (algebraische Vielfachheit 2).

Wir bestimmen nun die Eigenvektoren:

$\underline{\lambda_1 = 1}$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 \text{ ist frei, } x_2 = 2x_3, x_1 = x_2 - x_3 = x_3.$$

Mit der Wahl $x_3 = 1$ erhalten wir den Eigenvektor $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda_2 = -3}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1, x_3 \text{ sind frei, } x_2 = x_3.$$

Mit der Wahl $x_1 = 1, x_3 = 0$ erhalten wir den Eigenvektor $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Siehe nächstes Blatt!

Mit der Wahl $x_1 = 0, x_3 = 1$ erhalten wir den Eigenvektor $v^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit erfüllen die Matrizen

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Gleichung $D = T^{-1}AT$.

b) Da 0 kein Eigenwert von A ist, ist A invertierbar.

c) Ein solches T kann man nicht finden. T enthält in den Spalten die Eigenvektoren von A und damit T orthogonal ist, müssten diese eine orthonormale Basis bilden. Dies ist nur dann möglich, wenn die Eigenräume senkrecht aufeinander stehen, $v^{(1)}$ müsste also senkrecht auf $v^{(2)}$ und $v^{(3)}$ stehen. Dies ist aber nicht der Fall.

3. Sei $\mathcal{P}_2$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Sei weiter $\beta \in \mathbb{R}$ und

$$F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2, \quad p(x) \mapsto p(x) + \beta x p'(x) - 2xp''(x)$$

eine lineare Abbildung.

a) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

b) **[1 Punkt]** Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist F diagonalisierbar?

c) **[4 Punkte]** Bestimmen Sie für die β aus b) eine Basis von Eigenvektoren von F.

d) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie, für welche β aus b) die Gleichung $F(p(x)) = x$ eine Lösung $p \in \mathcal{P}_2$ besitzt und geben Sie im Existenzfall alle solchen Lösungen an.

a) Die Spalten der Darstellungsmatrix $[F]_{\mathcal{B}}$ sind die Bilder der Basis $\mathcal{B}$ unter F. Also:

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 + 0 + 0 = 1, \\ F(x) &= x + \beta x + 0 = (1+\beta)x, \\ F(x^2) &= x^2 + \beta x(2x) - 2x(2) = -4x + (1+2\beta)x^2. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$[F]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\beta & -4 \\ 0 & 0 & 1+2\beta \end{pmatrix}.$$

b) Da $[F]_{\mathcal{B}}$ eine Dreiecksmatrix ist, stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen. Für $\beta \neq 0$ haben wir also 3 verschiedene Eigenwerte und F ist diagonalisierbar. Für $\beta = 0$ haben wir hingegen 1 als 3-fachen Eigenwert. Damit die Matrix diagonalisierbar wäre, müssten wir 3 linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 1 finden, also müsste die Matrix $[F]_{\mathcal{B}} - I_3$ die Nullmatrix sein. Dies ist aber nicht der Fall.
Insgesamt gilt: F ist für $\beta \neq 0$ diagonalisierbar.

c) Sei also $\beta \neq 0$. Die Eigenwerte kennen wir bereits, diese sind $1, 1+\beta, 1+2\beta$.
Wir bestimmen nun die Eigenvektoren von $[F]_{\mathcal{B}}$:
$\underline{\lambda_1 = 1}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -4 \\ 0 & 0 & 2\beta \end{pmatrix} \overset{\beta \neq 0}{\Rightarrow} x_3 = x_2 = 0, x_1 \text{ ist frei.}$$

Mit der Wahl $x_1 = 1$ erhalten wir den Eigenvektor $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda_2 = 1+\beta}$:

$$\begin{pmatrix} -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \overset{\beta \neq 0}{\Rightarrow} x_3 = x_1 = 0, x_2 \text{ ist frei.}$$

Siehe nächstes Blatt!

Mit der Wahl $x_2 = 1$ erhalten wir den Eigenvektor $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda_2 = 1 + 2\beta}$:

$$\begin{pmatrix} -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\beta \neq 0}{\Rightarrow} x_3 \text{ ist frei}, x_2 = -\frac{4x_3}{\beta}, x_1 = 0.$$

Mit der Wahl $x_3 = \beta$ erhalten wir den Eigenvektor $v^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ \beta \end{pmatrix}$.

Eine Basis aus Eigenvektoren von F ist somit $\{1,\ x,\ -4x + \beta x^2\}$.

d) Für $\beta \neq 0$ haben wir oben die Eigenvektor-Basis $\mathcal{B}'$ berechnet. Die Gleichung $F(p(x)) = x$ ist in der Basis $\mathcal{B}'$ das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Koordinaten von $p(x)$ in der Basis $\mathcal{B}'$ sind.
Damit gilt $a = 0$. Für $\beta \neq -\frac{1}{2}$ folgt $c = 0$ und für $\beta = -\frac{1}{2}$ ist c frei. Für $\beta \neq -1$ ist $b = \frac{1}{1+\beta}$, während es für $\beta = -1$ keine Lösung gibt. Zusammen gilt

$$\begin{aligned} \beta \notin \left\{0,\ -1,\ -\frac{1}{2}\right\} \quad &\Rightarrow \quad p(x) = \frac{1}{1+\beta}x \\ \beta = -1 \quad &\Rightarrow \quad \text{keine Lösung} \\ \beta = -\frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad p(x) = \frac{1}{1+\beta}x + c(-4x + \beta x^2) \\ &\qquad\quad = 2x - c\left(4x + \frac{1}{2}x^2\right),\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Sei
$$q(x) = x_1^2 + \sqrt{2} \cdot 4x_1x_2 + 3x_2^2$$
eine quadratische Form mit $x = (x_1, x_2)^\top$.

a) **[1 Punkt]** Bestimmen Sie eine symmetrische, reelle Matrix A, so dass $q(x) = x^\top Ax$ gilt.

b) **[6 Punkte]** Führen Sie die Hauptachsentransformation $y = Tx$ durch.

c) **[3 Punkte]** Skizzieren Sie die Menge $Q = \{x \,|\, q(x) = 0\}$ im y-Koordinatensystem der Hauptachsen.

a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte:
$$P_A(\lambda) \;=\; \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda-5)(\lambda+1).$$

Die Eigenwerte lauten also $\lambda_1 = 5$ (algebraische Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = -1$ (algebraische Vielfachheit 1).

Wir bestimmen nun die Eigenvektoren:

$\underline{\lambda_1 = 5}$:
$$\begin{pmatrix} -4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 \text{ ist frei, } x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2.$$

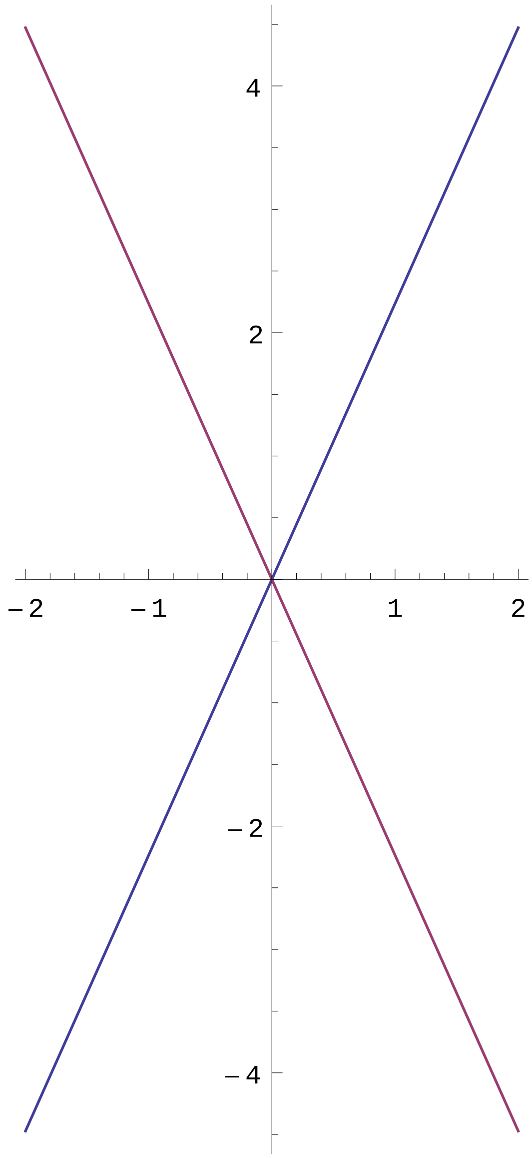
Mit der Wahl $x_2 = \sqrt{2}$ erhalten wir den Eigenvektor $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Da die Eigenvektoren orthogonal sein müssen, ist ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = -1$ gegeben durch $v^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$. Beide Eigenvektoren haben Länge $\sqrt{3}$.

Damit gilt für $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ die Beziehung $D = S^\top AS$. Somit liefert die Hauptachsentransformation $y = S^\top x = Tx$
$$q(x) = x^\top Ax = (Sy)^\top A(Sy) = y^\top S^\top ASy = y^\top Dy = 5y_1^2 - y_2^2.$$

c)
$$q(x) = 0 \Leftrightarrow 5y_1^2 - y_2^2 = 0 \Leftrightarrow 5y_1^2 = y_2^2 \Leftrightarrow y_2 = \pm\sqrt{5}y_1.$$

Geometrisch ist das ein Geradenpaar, welches sich im Punkt $(0,0)$ schneidet. Die Geraden haben die Steigungen $\sqrt{5}$ bzw. $-\sqrt{5}$ (bezüglich der Hauptachsen).



Bitte wenden!

5. Wir betrachten den Unterraum

$$U = \operatorname{span}\left\{(1,0,1,0)^\top, (2,2,2,1)^\top\right\}$$

von $\mathbb{R}^4$.

a) **[3 Punkte]** Wir bezeichnen mit $U^\perp$ alle Vektoren von $\mathbb{R}^4$, welche senkrecht auf U stehen. Bestimmen Sie $U^\perp$!

b) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^4$ bezüglich des Standardskalarproduktes, welche ausschliesslich Vektoren aus U resp. $U^\perp$ enthält.

c) **[2 Punkte]** Geben Sie die Orthogonalprojektion von $x = (5,1,-2,0)^\top$ auf U an.

d) **[2 Punkte]** Geben Sie die Orthogonalprojektion von $x = (5,1,-2,0)^\top$ auf $U^\perp$ an.

a) Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass x_3 und x_4 frei sind und dass $x_1 = -x_3$ und $x_2 = -\frac{1}{2}x_4$ gilt. Wir erhalten

$$U^\perp = \operatorname{span}\left\{(1,0,-1,0)^\top, (0,1,0,-2)^\top\right\}.$$

b) Per Konstruktion stehen die Vektoren aus U senkrecht auf den Vektoren aus $U^\perp$. Somit müssen wir mit dem Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren nur noch je die beiden Basisvektoren orthogonalisieren und alle 4 Vektoren normieren.

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{u}_2 - \langle \tilde{u}_2, u_1 \rangle \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\tilde{u}_4 - \underbrace{\langle \tilde{u}_4, u_3 \rangle}_{=0} \cdot u_3 = \tilde{u}_4 \Rightarrow u_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die gesuchte Basis

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

c) Wir rechnen

$$\begin{aligned} x_U &= \langle x, u_1 \rangle\, u_1 + \langle x, u_2 \rangle\, u_2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \cdot 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Entweder gehen wir analog wie in c) vor oder sehen, dass

$$x_{U^\perp} = x - x_U = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{2} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$