

ETH Zürich, D-MAVT  
**Basisprüfung Lineare Algebra**  
Winter 2009  
Prof. K.Nipp

**Wichtige Hinweise**

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

— • —

**1. a)** Wählen Sie aus

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a^{(4)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, a^{(5)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

eine Basis für  $\mathbb{R}^4$  mit dem Gaussverfahren.

**b)** Sei nun  $A = (a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)} a^{(4)} a^{(5)})$ . Bestimmen Sie Bild  $A$  und Kern  $A$ .

**2.** Gegeben sind 4 Punkte in der Ebene  $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , wobei

$x_i$	1	2	3	4
$y_i$	5.5	11.25	19.5	35.75

Bestimmen Sie eine Funktion  $y = f(x) = a + bx^2$ , so dass die Summe der Fehlerquadrate in  $y$ -Richtung

$$\sum_{i=1}^4 [f(x_i) - y_i]^2$$

minimal wird.

**3. a)** Bilden Sie aus

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, b^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine orthonormale Basis  $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}$ , so dass

$$\text{span} \{e^{(1)}, \dots, e^{(j)}\} = \text{span} \{b^{(1)}, \dots, b^{(j)}\}, j = 1, 2, 3, 4.$$

**Bitte wenden!**

b) Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren in  $\mathbb{R}^3$  :

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die nötigen MATLAB-Statements, um eine orthonormale Basis  $q_1, q_2, q_3$  von  $\mathbb{R}^3$  zu konstruieren, so dass  $\text{span}\{q_1\} = \text{span}\{a^{(1)}\}$  und  $\text{span}\{q_1, q_2\} = \text{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}\}$ .

4. Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Für welchen Parameterwert  $s$  ist 2 ein Eigenwert von  $C$  mit geometrischer Vielfachheit 2?

b) Bestimmen Sie für diesen Parameterwert alle Eigenwerte sowie die dazugehörigen Eigenräume von  $C$ .

5. a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems 2. Ordnung

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -6y_1 + y_2, \\ \ddot{y}_2 &= 3y_1 - 4y_2. \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie alle Anfangswerte  $y_1(0), y_2(0), \dot{y}_1(0), \dot{y}_2(0)$ , für welche die zugehörigen Lösungen des Differentialgleichungssystems die folgenden Relationen erfüllen:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_2(0), \\ \dot{y}_1(0) &= 2\dot{y}_2(0), \\ y_1(1) &= 0. \end{aligned}$$

6. Sei  $\mathcal{P}_n$  der Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq n$ . Betrachten Sie die folgenden Abbildungen  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$

$$\begin{aligned} P(x) \in \mathcal{P}_2 &\xrightarrow{\mathcal{F}_1} Q(x) = 3P'(x) \in \mathcal{P}_1, \\ P(x) \in \mathcal{P}_1 &\xrightarrow{\mathcal{F}_2} Q(x) = 2x \in \mathcal{P}_1 \end{aligned}$$

die jedem Polynom  $P(x)$  das Polynom  $Q(x)$  zuordnen ( $P'(x)$  bezeichnet die Ableitung von  $P(x)$ ).

a) Ist  $\mathcal{F}_1$  eine lineare Abbildung? Wenn ja, durch welche Matrix  $A_1$  wird  $\mathcal{F}_1$  beschrieben? Wählen Sie als Basis für  $\mathcal{P}_1$  bzw.  $\mathcal{P}_2$  die Standardbasis  $1, x$  bzw.  $1, x, x^2$ .

b) Ist  $\mathcal{F}_2$  eine lineare Abbildung? Wenn ja, durch welche Matrix  $A_2$  wird  $\mathcal{F}_2$  beschrieben? Wählen Sie als Basis für  $\mathcal{P}_1$  die Standardbasis  $1, x$ .

c) Angenommen eine reguläre reelle Matrix  $C$  sei in MATLAB schon gegeben. Geben Sie die MATLAB-Statements um  $C^{-1}$  sowie  $C^\top$  zu berechnen.

**Viel Erfolg!**