

# Determinanten

## Satz (Determinanten und LGS)

Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix. Dann sind äquivalent:

- i.  $A$  ist invertierbar
- ii.  $\det A \neq 0$
- iii.  $\text{Rang}(A) = n$
- iv. Das LGS  $Ax = b$  ist für jedes  $b$  lösbar.
- v. Das LGS  $Ax = b$  besitzt genau eine Lösung.
- vi. Das homogene LGS  $Ax = 0$  besitzt nur die triviale Lösung.

## Korollar

Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix. Dann gilt:

- i. Das homogene LGS  $Ax = 0$  hat genau dann nur die triviale Lösung, wenn  $\det A \neq 0$ .
- ii. Das LGS  $Ax = b$  ist genau dann für beliebiges  $b$  lösbar, wenn  $\det A \neq 0$ .
- iii. Das LGS  $Ax = b$  hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn  $\det A \neq 0$ .

**Übersicht:** Ist  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix, so gilt

Rang( $A$ )	$\det A$	LGS	Effekt
$= n$	$\neq 0$	$Ax = 0$	hat nur die triviale Lösung
$< n$	$= 0$	$Ax = 0$	hat unendlich viele Lösungen
$= n$	$\neq 0$	$Ax = b$	hat für beliebiges $b$ genau eine Lösung
$< n$	$= 0$	$Ax = b$	hat je nach $b$ keine oder unendlich viele Lösungen

## Satz

Ist  $\tilde{A}$  die Adjunkte einer regulären Matrix, so gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$$

**Bemerkung:** Dies ist keine effiziente Methode zur Berechnung der Inversen.

## Definition

Sei  $V$  eine nichtleere Menge. Dann heisst  $V$  ein **reeller Vektorraum**, wenn eine innere Operation (Addition)

$$\begin{aligned} + & : V \times V \rightarrow V \\ & (a, b) \mapsto a + b \end{aligned}$$

und eine äussere Operation (Multiplikation mit einem Skalar)

$$\begin{aligned} \cdot & : \mathbb{R} \times V \rightarrow V \\ & (\alpha, a) \mapsto \alpha a \end{aligned}$$

definiert sind, so dass folgende Axiome gelten:

## Definition (Fortsetzung)

$$A1 \quad \forall u, v \in V: u + v = v + u$$

$$A2 \quad \forall u, v, w \in V: (u + v) + w = u + (v + w)$$

$$A3 \quad \exists 0 \in V \text{ so, dass } \forall u \in V: u + 0 = u$$

$$A4 \quad \forall u \in V \exists -u \in V \text{ so, dass } u + (-u) = 0$$

$$M1 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V: (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$$

$$M2 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V: (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \text{ und} \\ \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

$$M3 \quad \forall u \in V: 1u = u$$

Der Vektor  $0 \in V$  heisst **Nullvektor**.

Ein **komplexer VR** ist entsprechend, mit  $\mathbb{C}$  an Stelle von  $\mathbb{R}$ , definiert.

**Bemerkung:** Für zwei Mengen  $A, B$  ist das **kartesische Produkt** die Menge aller geordneten Paare

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

## Beispiel

Die Menge  $V$  der Vektoren in der Ebene (im Raum) zusammen mit der Vektoraddition und der Multiplikation mit Skalaren ist ein reeller VR.

## Beispiel

$\mathbb{R}^n := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$  mit der Addition

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

und der Multiplikation mit Skalaren

$$\alpha x = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

ist ein reeller VR.

Analog ist

$$\mathbb{C}^n := \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{C} \right\}$$

ein komplexer VR. Und

$$\mathbb{Q}^n := \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

ist ein VR über dem Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen.

## Beispiel

$\mathbb{R}^{m \times n}$ , die Menge aller  $m \times n$ -Matrizen mit reellen Koeffizienten, zusammen mit der Matrixaddition und der Multiplikation mit Skalaren, ist ein reeler VR.

## Lemma

Sei  $V$  ein Vektorraum. Dann gilt

0. Es gibt nur einen Nullvektor in  $V$ .

1.  $\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} \implies \vec{b} = \vec{0}$

2.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \alpha \vec{0} = \vec{0}$ .

3.  $\forall \vec{a} \in V: 0\vec{a} = \vec{0}$ .

4.  $\forall \vec{a} \in V: (-1)\vec{a} = -\vec{a}$