

Aus der Lehr- und Lernforschung

- ▶ Hans baute ein Boot.
- ▶ Urs liess einen Drachen steigen.
- ▶ Lutz ass einen Apfel.
- ▶ Beat ging über das Dach.
- ▶ Jochen versteckte ein Ei.
- ▶ Dominik setzte das Segel.
- ▶ Peter schrieb ein Drama.
- ▶ Viktor drückte den Schalter.

- ▶ Wer ass einen Apfel?
- ▶ Wer versteckte ein Ei?
- ▶ Wer liess einen Drachen steigen?
- ▶ Wer ging über das Dach?
- ▶ Wer drückte den Schalter?
- ▶ Wer setzte das Segel?
- ▶ Wer baute ein Boot?
- ▶ Wer schrieb das Drama?

???

- ▶ Noah baute ein Boot.
- ▶ Benjamin Franklin liess einen Drachen steigen.
- ▶ Adam ass einen Apfel.
- ▶ Der Weihnachtsmann ging über das Dach.
- ▶ Der Osterhase versteckte ein Ei.
- ▶ Christoph Kolumbus setzte das Segel.
- ▶ William Shakespeare schrieb ein Drama.
- ▶ Thomas Edison drückte den Schalter.

- ▶ Wer ass einen Apfel?
- ▶ Wer versteckte ein Ei?
- ▶ Wer liess einen Drachen steigen?
- ▶ Wer ging über das Dach?
- ▶ Wer drückte den Schalter?
- ▶ Wer setzte das Segel?
- ▶ Wer baute ein Boot?
- ▶ Wer schrieb das Drama?



1. Grundsatz

Auf **Vorwissen** aufbauen:

In der Vorlesung immer am Ball bleiben.

In der Vorlesung erarbeitet und ausführlich erörtert:

Satz

Das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ hat genau dann nichttriviale Lösungen wenn $\det(A) = 0$.

Prüfungsaufgabe

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie einen Vektor $x \neq 0$ sodass $Ax = 0$.
- Bestimmen Sie die Determinante von A .

Ernüchterndes Resultat: Fast alle Kandidat/-innen berechnen $\det(A)$!

2. Grundsatz

Passives in **aktives Wissen** verwandeln:

Übungen und alte Prüfungen lösen.

Lerne diese Buchstabenmatrix auswendig:

T	I	O	X	S	T	Z
H	C	W	J	O	H	Y
E	K	N	U	V	E	D
Q	B	F	M	E	L	O
U	R	O	P	R	A	G

Aha!

T	I	O	X	S	T	Z
H	C	W	J	O	H	Y
E	K	N	U	V	E	D
Q	B	F	M	E	L	O
U	R	O	P	R	A	G

3. Grundsatz

Chunking

Wissen strukturieren: Kleinere Wissens-elemente zu Blöcken zusammenfassen, und diese wieder zu grösseren Einheiten verbinden.

Zusammenfassung

Repetition

Lineare Algebra

Drei Grundsätze des Lernens

- ▶ Vorwissen aktivieren: **Repetieren**
- ▶ Passives in aktives Wissen umbauen: **Üben**
- ▶ Chunking: **Strukturieren**

Aus der Lehr- und
Lernforschung

LR-Zerlegung

Determinanten

Definition

Eine $n \times n$ -Matrix P heisst **Permutationsmatrix**, falls sie aus \mathbb{I}_n durch Vertauschung von Zeilen hervorgegangen ist.

Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{[3]} \\ e^{[1]} \\ e^{[2]} \end{pmatrix}$$

Bemerkung

- ▶ Jede Permutationsmatrix ist orthogonal.
- ▶ In jeder Zeile und in jeder Spalte steht genau eine 1.
- ▶ In PA erscheinen die Zeilen von A so vertauscht, wie es die Zeilen von P sind.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} e^{[3]} \\ e^{[1]} \\ e^{[2]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ a^{[2]} \\ a^{[3]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{[3]} \\ a^{[1]} \\ a^{[2]} \end{pmatrix}$$

Anwendung: Falls beim Gaußalgorithmus angewandt auf A Zeilenvertauschungen nötig sind, wählt man eine Permutationsmatrix P so, dass für PA keine Zeilenvertauschungen nötig sind. Dann liefert das bisher beschriebene Verfahren die LR-Zerlegung $PA = LR$.

Beispiel:

Finde $PA = LR$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Linkerhand führen wir Buch über die Zeilenvertauschungen, rechterhand erfolgt die LR-Zerlegung:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \textcircled{2} & -1 & 1 \end{array}$$

Wir vertauschen die erste und die dritte Zeile, um das Pivotelement $\textcircled{2}$ in Position zu bringen:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \textcircled{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}$$

Nun wird **nur rechterhand** das 2-fache der Zeile 1 von Zeile 2 subtrahiert, d.h. $l_{21} = 2$.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \textcircled{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} & -2 \end{array}$$

Beachte hier die erwähnte platzsparende Schreibweise:

Wir haben den Faktor 2 an die Stelle gesetzt, wo wir die Null erzeugt haben!

Wir vertauschen die zweite und die dritte Zeile, um das Pivotelement $\textcircled{3}$ in Position zu bringen:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \textcircled{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & \textcircled{-1} \end{array}$$

Wir lesen für $PA = LR$ ab:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Satz

Sei A eine $m \times n$ -Matrix. Dann liefert das erweiterte Gaussverfahren, angewandt auf A , eine invertierbare $m \times m$ -Linksdreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonale, eine $m \times n$ -Matrix in Zeilenstufenform R und eine $m \times m$ -Permutationsmatrix P , so dass $PA = LR$ gilt. P erhält man aus \mathbb{I}_m durch die Zeilenvertauschungen, die bei A nötig waren.

Anwendung

Sei A eine $m \times n$ -Matrix. Dann kann man $Ax = b$ wie folgt lösen:

1. Bestimme die LR-Zerlegung $PA = LR$.
2. Löse $Ly = Pb$ durch Vorwärtseinsetzen.
3. Bestimme die Lösungsmenge von $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen.

Determinanten

Die Determinante ordnet jeder $n \times n$ -Matrix A eine Zahl zu.

Notation: $\det A$ oder $|A|$.

Definition

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann schreiben wir A_{ij} für die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die man aus A durch Streichen der Zeile i und Spalte j bekommt:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & & \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Rekursive Definition der Determinate

- ▶ $n = 1$: Für $A = (a)$ ist $\det A := a$.
- ▶ $n > 1$: Man setzt

$$\det A := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

Beispiel

- ▶ $n = 2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$
- ▶ $n = 3$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

Rekursive Definition der Determinate

- ▶ $n = 1$: Für $A = (a)$ ist $\det A := a$.
- ▶ $n > 1$: Man setzt

$$\det A := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

Beispiel

- ▶ $n = 2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$
- ▶ $n = 3$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

Rekursive Definition der Determinate

- ▶ $n = 1$: Für $A = (a)$ ist $\det A := a$.
- ▶ $n > 1$: Man setzt

$$\det A := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

Beispiel

- ▶ $n = 2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

- ▶ $n = 3$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

Rekursive Definition der Determinate

- ▶ $n = 1$: Für $A = (a)$ ist $\det A := a$.
- ▶ $n > 1$: Man setzt

$$\det A := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

Beispiel

- ▶ $n = 2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

- ▶ $n = 3$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$

Rekursive Definition der Determinate

- ▶ $n = 1$: Für $A = (a)$ ist $\det A := a$.
- ▶ $n > 1$: Man setzt

$$\det A := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

Beispiel

- ▶ $n = 2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

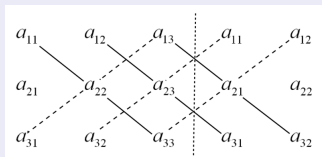
- ▶ $n = 3$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$
 $= 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 2$

Bemerkungen

$$\blacktriangleright \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |a_1 & b_1| \\ |a_2 & b_2| \end{pmatrix}.$$

D.h. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ist der orientierte Flächeninhalt des von $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

- ▶ Regel von Sarrus** (nur für 3×3 -Matrizen!!!)



$\det A =$ *Summe der Produkte in Hauptdiagonalrichtung*
minus Summe der Produkte in Nebendiagonalrichtung.

Definition

- ▶ Die Zahlen $M_{ij} := \det A_{ij}$ heißen **Minoren** von A .
- ▶ Die Zahlen $\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$ heißt **Kofaktoren** von A .
- ▶ Die Matrix $(\tilde{a}_{ij})^T$ heißt **Adjunkte** von A .

Satz

- i. Vertauscht man zwei Zeilen von A , so wechselt die Determinante das Vorzeichen.
- ii. Addiert man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen (Zeilenoperation II) so ändert sich die Determinante nicht.

Die Determinante ist als Funktion jeder Zeile linear, d.h.

$$\text{iii. } \det \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ a^{[2]} \\ \vdots \\ \alpha a^{[i]} \\ \vdots \\ a^{[n]} \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ a^{[2]} \\ \vdots \\ a^{[i]} \\ \vdots \\ a^{[n]} \end{pmatrix} \text{ und}$$

Satz (Fortsetzung)

$$\text{iv. } \det \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ a^{[2]} \\ \vdots \\ a^{[i]} + b^{[i]} \\ \vdots \\ a^{[n]} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ a^{[2]} \\ \vdots \\ a^{[i]} \\ \vdots \\ a^{[n]} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ a^{[2]} \\ \vdots \\ b^{[i]} \\ \vdots \\ a^{[n]} \end{pmatrix}$$

Beispiele

$$\text{i. } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$\text{ii. } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c + 2a & d + 2b \end{vmatrix}$$

Beispiele

$$\text{iii. } \begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\text{iv. } \begin{vmatrix} a & b \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$