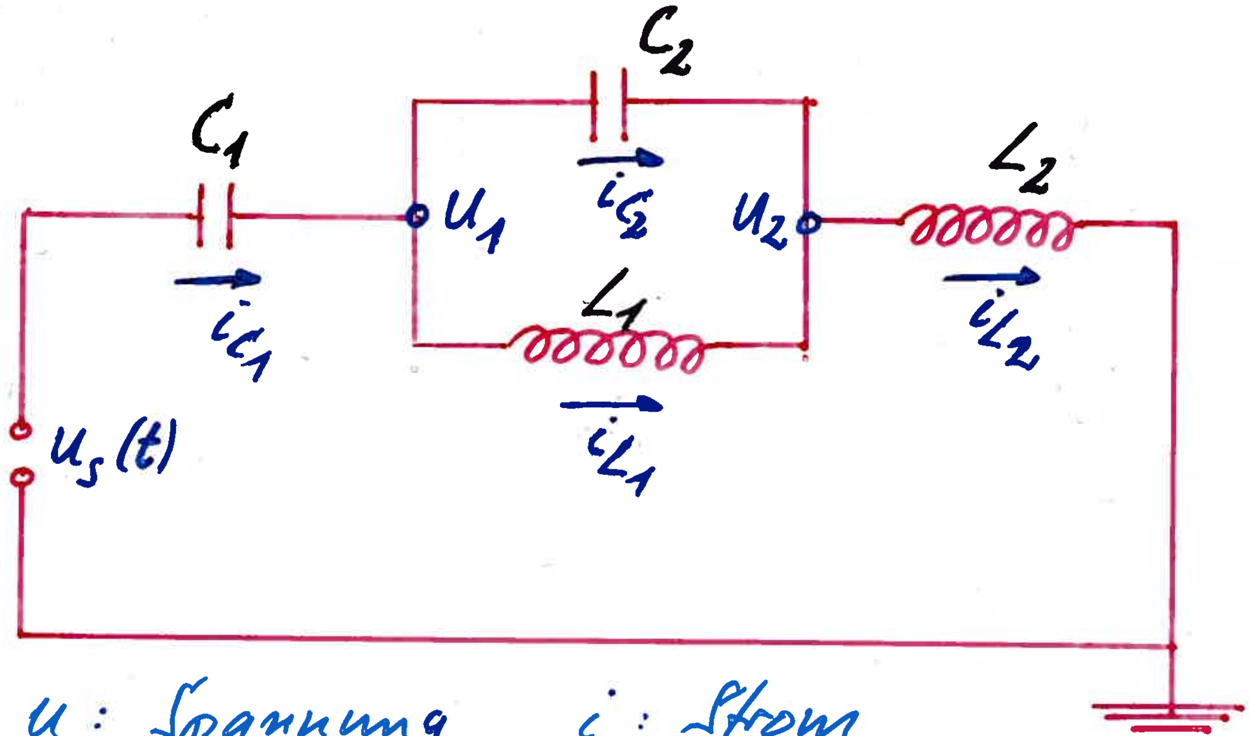
Elektrische Schaltkreise

A)



u : Spannung , i : Strom
u_s : Quell- "
C : Kapazität , L : Induktivität

Gesucht : u_1, u_2 ;
wobei $u_1(0) = 0$, $u_2(0) = 0$ (Einschalt-vorgang)

Kirchhoff'sche Gesetze an Knoten 1 und 2:

$$\frac{d}{dt} \cdot \quad \begin{aligned} i_{C_1} - i_{C_2} - i_{L_1} &= 0 \\ i_{L_1} + i_{C_2} - i_{L_2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} i'_{C_1} - i'_{C_2} - i'_{L_1} &= 0 \\ i'_{L_1} + i'_{C_2} - i'_{L_2} &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Bauelementgleichungen:

Kondensator: $\quad i_{C_j} = C_j \, u_{C_j}'$

$$\text{Spule:} \quad u_{L_j} = L_j \, i_{L_j}' \qquad , \; j = 1,2 \qquad (2)$$

Gilt:
$$u_{C_1} = u_s - u_1 \; , \quad u_{C_2} = u_1 - u_2 \qquad (3)$$
$$u_{L_1} = u_1 - u_2 \; , \quad u_{L_2} = u_2 - 0$$

Aus (2), (1):
$$C_1 u_{C_1}'' - C_2 u_{C_2}'' - \frac{1}{L_1} u_{L_1} = 0$$
$$C_2 u_{C_2}'' + \frac{1}{L_1} u_{L_1} - \frac{1}{L_2} u_{L_2} = 0$$

und mit (3):
$$C_1 (u_s'' - u_1'') - C_2 (u_1'' - u_2'') - \frac{1}{L_1}(u_1 - u_2) = 0$$
$$C_2 (u_1'' - u_2'') + \frac{1}{L_1}(u_1 - u_2) - \frac{1}{L_2} u_2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -C_1 - C_2 & +C_2 \\ C_2 & -C_2 \end{pmatrix}}_{=:M} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1'' \\ u_2'' \end{pmatrix}}_{=:u''} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} \\ -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \end{pmatrix}}_{=:B} \overbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}^{=:u} + \underbrace{\begin{pmatrix} -C_1 u_s'' \\ 0 \end{pmatrix}}_{=g(t)}$$

Also:

$$M u'' = B u + g(t)$$

Falls M regulär:

$$u'' = \underbrace{M^{-1} B}_{=: A} u + \underbrace{M^{-1} g(t)}_{=: f(t)}$$

Somit:

$$\boxed{u'' = A u + f(t)} \qquad (*)$$

(gewöhnl. Diff'gl. system 2. Ordnung mit konst. Koeff. und Inhomogenität)

Anfangsbed.: $\left| u(0) = 0, \quad u'(0) = 0 \right|$

Betr. homogenes System (Vor.: A halbeinfach)

$$u'' = Au \qquad (**)$$

Allg. Lösung $u_h(t)$ mit Transformationsmethode:

$$u = Tv, \text{ in } T \text{ Eigenbasis}$$

$$\underset{(**)}{\Longrightarrow} \quad v'' = \underbrace{T^{-1}AT}_{=:D}v \quad \text{mit EW-ten in Diagonalen}$$

$$\Longrightarrow \quad v_j'' = \lambda_j v_j, \; j = 1, \dots, n.$$

Sei $u_p(t)$ eine partikuläre Lösung von (*).

Gilt: $u(t) := u_h(t) + u_p(t)$

ist Lösung von (*). (Superpositionsprinzip)

Bew.: $u'' = (u_h + u_p)'' = u_h'' + u_p'' =$

$$\underset{(*) \text{ und } (**)}{=} Au_h + Au_p + f = A(u_h + u_p) + f$$

$$= Au + f$$

Q.E.D.

Bsp.: $C_j = 1,\ L_j = 1,\ j = 1, 2$

$u_s(t) = \sin t$

$$\Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$g(t) = \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad f(t) = -\sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung mit Transformationsmethode.

(Homogene

MATLAB:

$$T = \begin{array}{cc} x^{(1)} & x^{(2)} \\ \end{array}$$
$$T = \begin{pmatrix} 0.93 & -0.36 \\ 0.36 & 0.93 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} -0.38 & 0 \\ 0 & -2.6 \end{pmatrix}$$

(gerundet auf 2 Ziffern)

$$\omega_1 = \sqrt{-\lambda_1} = 0.62, \quad \omega_2 = \sqrt{-\lambda_2} = 1.6$$

$$\Rightarrow u_h(t) = [\alpha_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 \sin(\omega_1 t)]\, x^{(1)} + [\alpha_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 \sin(\omega_2 t)]\, x^{(2)}$$

<u>Ansatz</u>: $u_p(t) = \sin t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow u_p'' = \sin t \cdot \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$$

$$A u_p = \sin t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \sin t \begin{pmatrix} 0 & -a_2 \\ a_1 & -3a_2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad \begin{aligned} -a_1 &= -a_2 - 1 \\ -a_2 &= a_1 - 3a_2 - 1 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0$$

6.1

$$\Rightarrow \quad u_p(t) = \sin t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

$$u(0) = 0 = \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)}$$

$$u'(0) = 0 = \omega_1 \beta_1 x^{(1)} + \omega_2 \beta_2 x^{(2)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

T regulär

$$T \begin{pmatrix} \omega_1 \beta_1 \\ \omega_2 \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \omega_1 \beta_1 = -1.3 \\ \omega_2 \beta_2 = 0.48 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_1 = -2 \; , \; \beta_2 = 0.3$$

Also <u>Lösung des AWP</u>:

$$u(t) = \beta_1 \sin(\omega_1 t) x^{(1)} + \beta_2 \sin(\omega_2 t) x^{(2)} + \sin t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$