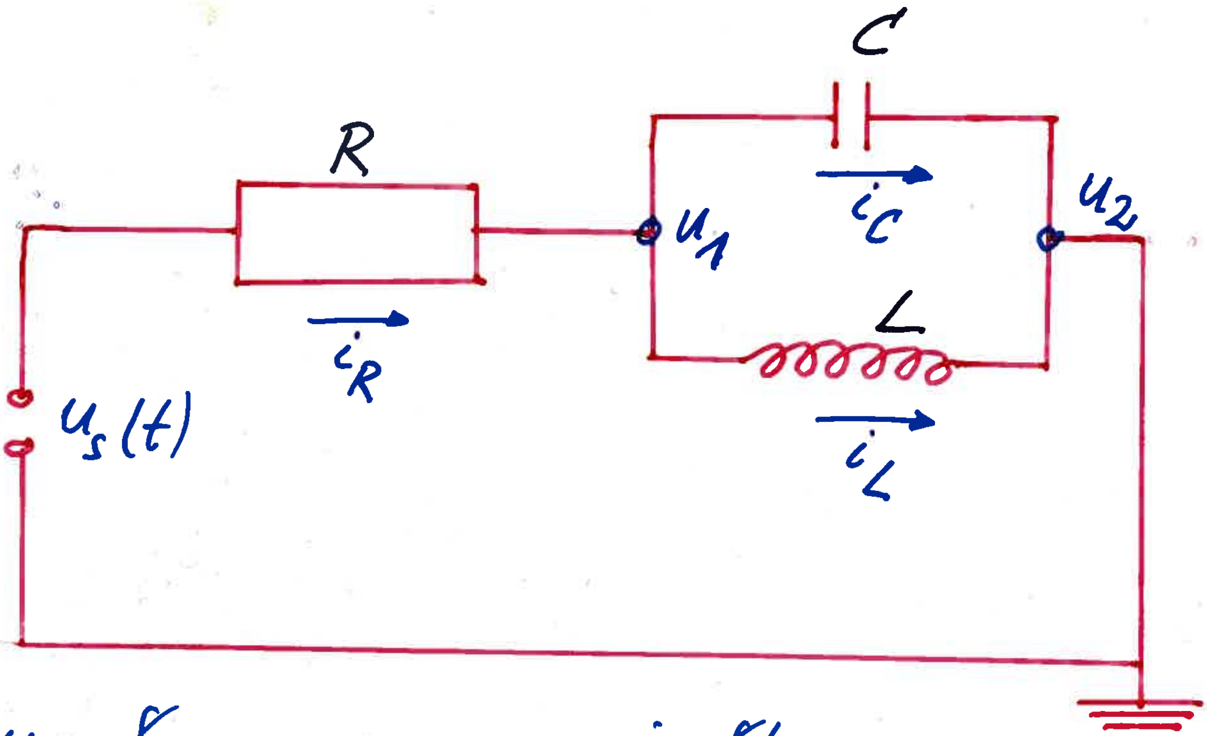
B)



u : Spannung , i Strom
u_s : Quell "

C : Kapazität , L: Induktivität,
R: Widerstand

$u_2 = 0$, u_1 gesucht.

Kirchhoff: $\quad i_R = i_C + i_L$

$\frac{d}{dt} \Big|$

$\Rightarrow \quad i_R' = i_C' + i_L' \qquad (1)$

Bauelemente:

$$u_R = R i_R$$
$$i_C = C u_C' \qquad (2)$$
$$u_L = L i_L'$$

Gilt: $u_R = u_s - u_1\,,\quad u_C = u_1 - 0$ (3)

$u_L = u_1 - 0$

$u := u_1$

Aus (2), (1) und (3):

$$\frac{1}{R}(u_s' - u') = C u'' + \frac{1}{L} u$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{u'' + \underbrace{\frac{1}{RC}}_{=:\gamma} u' + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{=:\delta} u = \underbrace{\frac{1}{RC} u_s'}_{=:g(t)}}$$

Setze $u' = v\,,\quad w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \quad u' = v\,,\quad v' = -\delta u - \gamma v + g(t)$

bzw. $\boxed{w' = A w + f(t)}$ $(*)$

mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\delta & -\gamma \end{pmatrix}\,,\quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$

(gewöhnl. Diff'glg.system 1. Ordnung mit konst. Koeff. und inhomogen)

Anf. bed.: $u(0) = v(0) = 0$ bzw. $\underline{w(0) = 0}$.

Homogenes System: $\boxed{w' = A w}$ $(**)$

2.

Allg. Lösung $w_h(t)$ von (**) mit Trf. meth. (Ann.: A halbeinfach):

$$w = Tx \quad ; \quad \text{in } T \text{ Eigenbasis}$$

$$\Rightarrow \quad x' = \underbrace{T^{-1}AT}_{=:D \text{ mit EW-ten in Diag.}} x$$

$$\Rightarrow \quad x_j' = \lambda_j x_j \quad \Rightarrow \quad \underline{x_j(t) = c_j e^{\lambda_j t}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{w_h(t) = T x(t)}$$

Sei $w_p(t)$ partikuläre Lös'g von (*).

Gilt: $w(t) := w_h(t) + w_p(t)$ ist Lösung von (*). (Superposition)

Begr.: $w' = (w_h + w_p)' = w_h' + w_p' =$

$$\overset{(*),(**)}{=} A w_h + A w_p + f = A\underbrace{(w_h + w_p)}_{=w} + f \quad \text{Q.E.D.}$$

Bsp.: $R = 1, \quad C = 1, \quad L = 1; \quad u_s(t) = \sin t$

$$\Rightarrow \gamma = 1, \quad \delta = 1; \quad g(t) = \cos t$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \cos t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EW-te von A:

$$\lambda(1+\lambda)+1=0 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda+1=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{=:\alpha} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{=:\beta}$$

EV-ren: $\hat{T} = \left(\hat{t}^{(1)} \; \hat{t}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 0.71 & 0 \\ -0.35 & +0.61 \end{pmatrix}$

(Real-, Imag.teil)

$\Longrightarrow$ Buch (8.22)

$$w_h(t) = 2e^{-t/2}\left\{[a_1 \cos(\beta t) - b_1 \sin(\beta t)]\hat{t}^{(1)} + [-a_1 \sin(\beta t) - b_1 \cos(\beta t)]\hat{t}^{(2)}\right\}$$

Ansatz: $w_p(t) = \begin{pmatrix} a\cdot\sin t + b\cdot\cos t \\ c\cdot\sin t + d\cdot\cos t \end{pmatrix}$

$$w_p' = \begin{pmatrix} a\cdot\cos t - b\cdot\sin t \\ c\cdot\cos t - d\cdot\sin t \end{pmatrix} = \underbrace{A\, w_p}_{\begin{pmatrix} c\cdot\sin t + d\cdot\cos t \\ (-a-c)\sin t + (-b-d)\cos t \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = d, \quad -b = c,$$

$$c = \underbrace{-b}_{c} - \underbrace{d}_{a} + 1, \quad \underbrace{-d}_{-a} = -a - c \quad \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 1 = d$$

Also: $w_p(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

$$0 = w(0) = w_h(0) + w_p(0)$$

$$= 2a_1 \vec{t}^{(1)} - 2b_1 \vec{t}^{(2)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \hat{T} \begin{pmatrix} a_1 \\ -b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{a_1 = 0}, \quad \underline{b_1 = 0.8}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{w(t) = 2 b_1 e^{-t/2} \left[\sin(\beta t)\, \vec{t}^{(1)} - \cos(\beta t)\, \vec{t}^{(2)} \right] + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}$$

ist <u>Lösung</u> des AWP.

Gilt: $u(t) = \hat{b}_1 e^{-t/2} \cdot \sin(\beta t) + \sin t$

$$\xrightarrow{t \to \infty} \sin t = u_s(t)$$