Serie 4

I. 1. Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei nicht für beliebige rechte Seiten lösbar. Daraus folgt

(a) $\det A = 0$,

(b) $\det A \neq 0$.

2. Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ habe nur die triviale Lösung. Daraus folgt

(a) $\det A = 0$,

(b) $\det A \neq 0$.

3. Sei M eine orthogonale Matrix. Daraus folgt

(a) $\det M \neq 0$,

(b) $\det M = 0$,

(c) $\det M = \pm 1$.

Bitte wenden!

4. Die LR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} .$$

Daraus folgt $\det A = 60$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

5. Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A im folgenden Gleichungssystem $Ax = b$:

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

(a) $\det A = -\frac{1}{\alpha+2}$,

(b) $\det A = \alpha + 2$,

(c) $\det A = -\alpha - 2$.

6. Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystemes aus Aufgabe **I. 5**

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

ist für $\alpha = -2$:

(a) die leere Menge,

(b) $x_1 = -3/4, \quad x_2 = 5/4$,

(c) $x_1 = t - 2, \quad x_2 = t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Siehe nächstes Blatt!

II. Sei I_2 die $2 \times 2-$Einheitsmatrix und $u = (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})^T$.

a) Für welche Werte des Parameters α ist die Matrix $V := I_2 - \alpha u\, u^T$ orthogonal?

b) Lösen Sie für die in **a)** ermittelten Werte von α das Gleichungssystem

$$V\,x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ohne das Gauss'sche Eliminationsverfahren zu benützen.

c) Kontrollieren Sie **a)** und **b)** mit MATLAB.

III. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2/5 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A, d.h. entsprechende Matrizen L, R und P, für welche $PA = LR$ gilt.

b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit MATLAB.
Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, für

$$b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 15/4 \\ 7/4 \\ 9/2 \end{pmatrix},$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung mit MATLAB.

Hinweis: MATLAB Hilfe für den Befehl `lu` anschauen.

IV. **a)** Bestimmen Sie den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Determinante von

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und von} \qquad N = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Schauen Sie sich N genau an um langwierige Berechnungen zu vermeiden.

c) Überprüfen Sie die Resultate aus **a)** und **b)** mit MATLAB.

Abgabe: Semesterwoche 6 in den jeweiligen Übungen beim zugeteilten Assistenten.