D-ITET, D-MATL, RW | Lineare Algebra | HS 2013
Prof. Dr. K. Nipp
C. Schillings

Serie 6

I. *Multiple Choice: Online abzugeben. Ev. sind mehrere Antworten richtig.*

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig. Dann hat das homogene Gleichungssystem

$$\lambda_1 a^{(1)} + ... + \lambda_n a^{(n)} = 0$$

nichttriviale Lösungen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.

(b) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann muss gelten $k \leq n$.

(c) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

(d) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

(e) Die Vektoren eines Erzeugendensystems können linear abhängig sein.

(f) Falls die Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ *keine* Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, dann müssen sie linear abhängig sein.

2. In welchen Fällen bilden die Vektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

(a) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

Bitte wenden!

3. In welchen Fällen bilden die Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(a) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

II. Finden Sie eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^5$ des linearen Gleichungssystems

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & & & = & 0 \end{array}\right. .$$

III. **a)** Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^3$ (Begründung).

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}.$$

b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix}a\\a\\1+a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\b\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\c\\b+c\end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren spannen einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ auf. Wie hängt die Dimension dieses Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

IV. Sei $\mathcal{P}_3$ der Raum der Polynome von höchstens drittem Grad. Die Monome 1, x, x^2, x^3 bilden eine Basis von $\mathcal{P}_3$, aber dies ist nicht die einzige Basis.
Die sogenannten Legendre-Polynome sind wie folgt definiert:

$$P_0(x) = 1, \quad P_i(x) = \frac{1}{2^i i!}\frac{d^i}{dx^i}(x^2-1)^i \text{ fü } i > 0.$$

Zeigen Sie, dass P_0, P_1, P_2, P_3 eine Basis von $\mathcal{P}_3$ bilden.

Abgabe: Semesterwoche 8 in den jeweiligen Übungen beim zugeteilten Assistenten.