D-ITET, D-MATL, RW | Lineare Algebra | HS 2013
Prof. Dr. K. Nipp
C. Schillings

Serie 8

I. 1. Die Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ im Vektorraum V sind nicht paarweise orthogonal. Dann sind sie linear abhängig.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Sei die QR-Zerlegung der $m \times n$ Matrix A $(m > n)$ gegeben mit Q orthogonal und $R = \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Spalten von A seien linear abhängig. Dann ist die $n \times n$ Matrix R_0

(a) singulär.

(b) regulär.

3. Falls die Spaltenvektoren der Matrix der Fehlergleichungen linear unabhängig sind, so haben die Normalgleichungen

(a) genau eine Lösung.

(b) unendlich viele Lösungen.

(c) keine Lösung.

Bitte wenden!

Gegeben sind die drei Punkte $P_i = (x_i, y_i),\ i = 1, 2, 3$, in der Ebene mit

x_i	0	1	2
y_i	5.41	5.17	5.93

Es soll mit Hilfe der Ausgleichsrechnung eine lineare Funktion $y = f(x) = ax + b$ gefunden werden, so dass die Summe der Fehlerquadrate in y–Richtung

$$\sum_{i=1}^{3} [f(x_i) - y_i]^2$$

minimal wird (lineare Regression).

4. Die Matrix der Fehlergleichungen lautet:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5.41 \\ 1 & 5.17 \\ 2 & 5.93 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5.41 & 5.17 & 5.93 \end{pmatrix}$

5. Die Matrix der Normalgleichungen lautet:

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 17.03 \\ 17.03 & 91.1619 \end{pmatrix}$

6. Daraus ergibt sich für die Parameter der linearen Funktion:

(a) $a = 0.27, b = 5.21\overline{2}$

(b) $a = 0.26, b = 5.24\overline{3}$

(c) $a = 0.15, b = 5.24\overline{7}$

wobei wir mit dem Überstrich die periodische Dezimalbruchdarstellung bezeichnen.

Siehe nächstes Blatt!

II. **a)** Gegeben seien die drei Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ bez. des Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bezüglich der in **a)** berechneten orthonormalen Basis $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$, d.h.

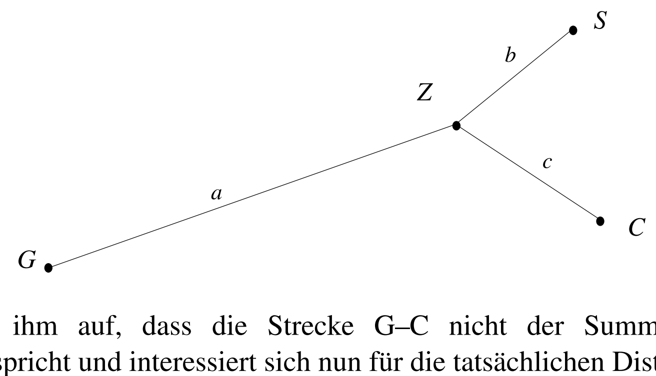
$$v = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}.$$

c) Lösen sie $a)$ mit Hilfe der QR-Zerlegung in Matlab.
Hinweis: In MATLAB liefert der Befehl `[Q,R] = qr(A)` die QR–Zerlegung der Matrix `A`.

III. Sei $V = \mathcal{P}_2$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2. Auf V ist durch $\big(p_1(x), p_2(x)\big) := \int_0^1 p_1(x)\, p_2(x)\, dx$ ein Skalarprodukt gegeben. Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von V, indem Sie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Vektoren $1, x, x^2$ anwenden.

IV. Ein trainierter Velofahrer fährt innerhalb einer Woche zwischen den Städten Zürich (Z), Chur (C), St. Gallen (S) und Genf (G) immer auf denselben Wegen hin und her. Dabei radelt er stets über Zürich. Er liest auf seinem Velocomputer folgende Distanzen ab:

Z–G	S–G	G–C	C–S	Z–C
280	390	400	210	118



Es fällt ihm auf, dass die Strecke G–C nicht der Summe der Strecken Z–G und Z–C entspricht und interessiert sich nun für die tatsächlichen Distanzen a, b, c.

Bitte wenden!

a) Bestimmen Sie für ihn die ausgeglichenen Werte für die Längen a, b, c der Teilstrecken durch Lösen der Normalgleichungen.

b) (i) Bestimmen Sie a, b, c mit Hilfe der QR–Zerlegung in MATLAB.

(ii) Lösen Sie diese Aufgabe nochmals mit dem '\'-Operator in MATLAB.

Abgabe: Semesterwoche 10 in den jeweiligen Übungen beim zugeteilten Assistenten.