Prof. Dr. K. Nipp
C. Schillings

Serie 9

I. *Multiple Choice: Online abzugeben. Ev. sind mehrere Antworten richtig.*

1. Welche der folgenden Abbildungen sind linear:

(a) $\mathcal{F} : x \mapsto ax + b$ mit $x, a, b \in \mathbb{R}$

(b) $\mathcal{F} : x \mapsto ax$ mit $x, a \in \mathbb{R}$

(c) $\mathcal{F} : x \mapsto Ax + b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$

(d) $\mathcal{F} : x \mapsto Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

(e) $\mathcal{F} : x \mapsto x^2 + 3x$ mit $x \in \mathbb{R}$

(f) $\mathcal{F} : x \mapsto exp(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$

2. Welche Aussagen sind richtig?

(a) Falls das homogene System $Ax = 0$ nicht-triviale Lösungen hat, so besteht Kern(A) aus dem Nullvektor.

(b) Falls das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung hat, so gilt $b \in$ Bild(A)

Bitte wenden!

3. Wir betrachten die Ebene E in $\mathbb{R}^3$, gegeben durch $x_2 = x_3$, und die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die jedes $x \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf E projiziert. Welche Aussagen treffen zu?

(a) Die Matrix A, welche $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b) Die Matrix A, welche $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(c) Es gilt dim(Kern A) = 1.

(d) Es gilt dim(Kern A) = 2.

(e) Es gilt dim(Bild A) = 2.

(f) Es gilt dim(Bild A) = 1.

II. **a)** Zu den Zeiten t_i, $i = 1, \ldots, 10$, werden für die physikalische Grösse $f(t)$ die Messwerte f_i beobachtet:

t_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
f_i	100	34	17	12	9	6	5	4	4	2

Wir setzen die unbekannte Funktion $f(t)$ als Linearkombination an der bekannten Funktionen $\varphi_j(t)$, $j = 1, \ldots, 4$, wobei

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{t},\ \varphi_2(t) = \frac{1}{t^2},\ \varphi_3(t) = e^{-(t-1)},\ \varphi_4(t) = e^{-2(t-1)},\ \text{also } f(t) = \sum_{j=1}^{4} \gamma_j \varphi_j(t).$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten γ_j der Linearkombination so, dass

$$\sum_{i=1}^{10} [f(t_i) - f_i]^2 \qquad \text{minimal wird.}$$

Lösen Sie dieses Ausgleichsproblem mit MATLAB. Bilden Sie die Gauss'schen Normalgleichungen, und lösen Sie diese mit der LR–Zerlegung, d.h. durch Linksdivision.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem nochmals mit Hilfe des QR–Zerlegungs-Zugangs in MATLAB.

c) Ermitteln Sie, ab welcher Stelle sich **a)** von **b)** unterscheidet.
Hinweis: Verwenden Sie den MATLAB-Befehl `format long`.

Siehe nächstes Blatt!

III. **a)** Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Basen für Kern A und Bild A.

b) Betrachten Sie die folgende lineare Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathbb{R}^2$ in sich.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad x' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}.$$

(i) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ (in der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$) beschrieben?

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathcal{F}$ längentreu ist.

IV. Betrachten Sie die folgende lineare Abbildung $\mathcal{F} : V \to W$, wobei V, W endlichdimensionale Vektorräume bezeichnen.
Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Sind $x_1, \ldots, x_k,\ k \in \mathbb{N}$ in V linear abhängig, so sind auch $\mathcal{F}(x_1), \ldots, \mathcal{F}(x_k)$ linear abhängig.

b) Sind die Vektoren $\mathcal{F}(x_1), \ldots, \mathcal{F}(x_k)$ linear unabhängig, so sind auch $x_1, \ldots, x_k$ linear unabhängig.

Abgabe: Semesterwoche 11 in den jeweiligen Übungen beim zugeteilten Assistenten.