D-ITET, D-MATL, RW | Lineare Algebra | HS 2013
Prof. Dr. K. Nipp
C. Schillings

Serie 10

I. *Multiple Choice: Online abzugeben. Ev. sind mehrere Antworten richtig.*

1. Im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt und 2-Norm definieren die folgenden Matrizen jeweils eine längentreue Abbildung:

(a) I_3

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

2. Im $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt und 2-Norm definieren die folgenden Matrizen jeweils eine winkeltreue Abbildung:

(a) I_3

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3. Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

(a) A, B, C und D sind Givens Rotationen.

(b) A, B und C sind Givens Rotationen, nicht aber D.

(c) Matrix A entspricht einer Drehung um φ im Uhrzeigersinn.

(d) Matrix A entspricht einer Drehung um φ im Gegenuhrzeigersinn.

(e) Matrix B entspricht einer Drehung um φ um die $e^{(1)}$-Achse, $e^{(1)} = (1,0,0)^T$.

(f) Matrix C entspricht einer Drehung um φ um die $e^{(2)}$-Achse im Gegenuhrzeigersinn von der positiven $e^{(2)}$-Achse aus betrachtet.

(g) Matrix D ist eine Drehung um die $e^{(2)}$-Achse kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(2)}$-Ebene.

(h) Matrix D ist eine Drehung um die $e^{(2)}$-Achse kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(3)}$-Ebene.

4. Für das Volumen V des von den Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelepipeds gilt

(a) $V = 2$

(b) $V = 3$

Siehe nächstes Blatt!

II. Sei $\mathcal{P}_3$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}_3$ in sich:

$$P(x) \in \mathcal{P}_3 \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad Q(x) = P'(x) \in \mathcal{P}_3,$$

die jedem Polynom $P(x)$ das Polynom $Q(x) = P'(x)$ zuordnet ($P'(x)$ bedeutet die Ableitung von $P(x)$ nach x).

a) Zeigen Sie: $\mathcal{F}$ ist eine lineare Abbildung.

b) Gegeben sei im Urbildraum und im Bildraum die Basis $1,\ x,\ x^2,\ x^3$. Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

III. Gegeben sei der Vektorraum $V^3 = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & -5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von V^3 nach V^3.

a) Durch die Wahl der neuen Basis

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Matrix T der Koordinatentransformation.

b) Durch welche Matrix B wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten (in $W^3 = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis) beschrieben?

c) Interpretieren Sie die Abbildung in den ursprünglichen Koordinaten (in V^3) geometrisch.

IV. a) Seien $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ k linear unabhängige Vektoren. Leiten Sie mit Hilfe der QR-Zerlegung eine Formel zur Berechnung des Volumens des von den k Vektoren aufgespannten Parallelepipeds her.

b) Zeigen Sie, dass für die von der $\|x\|_1,\ x \in \mathbb{R}^n$, induzierten Matrixnorm gilt

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right\},$$

wobei A eine $n \times n$-Matrix bezeichnet.

Abgabe: Semesterwoche 12 in den jeweiligen Übungen beim zugeteilten Assistenten.