Serie 11

I. *Multiple Choice: Online abzugeben. Ev. sind mehrere Antworten richtig.*

1. Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Zu jeder reellen $n \times n$ Matrix A gibt es eine orthonormale Eigenbasis.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Für eine diagonalisierbare Matrix gilt für einen Eigenwert λ, dass

(a) algebraische Vielfachheit $<$ geometrische Vielfachheit

(b) algebraische Vielfachheit $>$ geometrische Vielfachheit

(c) algebraische Vielfachheit $=$ geometrische Vielfachheit

4. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Bitte wenden!

5. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

6. Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

7. Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenvektoren.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

II. **a)** Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix, d.h. bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Überprüfen Sie Ihr Resultat von **a)** und **b)** in MATLAB.
Hinweis: `[V,D] = eig(C)` gibt die Eigenwerte der Matrix C in der Diagonalen von D und die zugehörigen Eigenvektoren in den Spalten von V zurück.

d) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu C.

(ii) Berechnen Sie die Matrix e^C.

(iii) Prüfen Sie **d)(i)** und **d)(ii)** mit MATLAB nach.

Siehe nächstes Blatt!

III. Geben Sie in MATLAB die Matrix $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ein.

a) Berechnen Sie mit MATLAB die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.

b) Lösen Sie mit MATLAB das Eigenwertproblem für A^{-1}, A^2 und A^3. Was stellen Sie fest?

c) Beweisen Sie nun, dass für eine beliebige $n \times n$–Matrix M mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor x folgendes gilt:

(i) λ^k ist ein Eigenwert von M^k $(k \in \mathbb{N})$ und x ein zugehöriger Eigenvektor.

(ii) Ist M invertierbar, so ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von M^{-1} und x ein zugehöriger Eigenvektor.

(iii) M und M^T besitzen die selben Eigenwerte.

(iv) Ist M eine obere Dreiecksmatrix, dann ist $P_M(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(m_{ii} - \lambda)$, wobei m_{ii} die Diagonalelemente von m bezeichnen, und somit sind die Diagonalelemente die Eigenwerte von M.

IV. Die *Fibonacci–Folge* $(F_0, F_1, F_2, F_3, \ldots)$ ist wie folgt definiert:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

a) Bestimmen Sie das allgemeine Glied F_n nach folgender Anleitung:

(i) Setzen Sie $x^{(n)} = \binom{F_n}{F_{n+1}}$, $n = 1, 2, \ldots$. Die Zuordnung $x^{(n)} \longmapsto x^{(n+1)}$ ist eine lineare Abbildung. Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A.

(ii) Die Zuordnung $x^{(0)} \longmapsto x^{(n)}$ ist auch eine lineare Abbildung. Sie wird beschrieben durch die Abbildungsmatrix A^n. Berechnen Sie den Vektor $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$ und geben Sie F_n an.

b) Bestimmen Sie F_{51} sowie F_{101} und vergleichen Sie mit den Resultaten aus der Aufgabe 3 der Serie 1.

Abgabe: Semesterwoche 13 in den jeweiligen Übungen beim zugeteilten Assistenten.